L11: Algebraic Path Problems with applications to Internet Routing Lecture 13 Reduction Redux

Timothy G. Griffin

timothy.griffin@cl.cam.ac.uk Computer Laboratory University of Cambridge, UK

Michaelmas Term, 2018



Recall : Reduced semigroup.

Here I have made equality explicit.

If
$$(S, =, \bullet)$$
 is semigroup and $r \in S \rightarrow S$, then define

reduce
$$((S, =, \bullet), r) \equiv (S_r, =, \bullet_r)$$

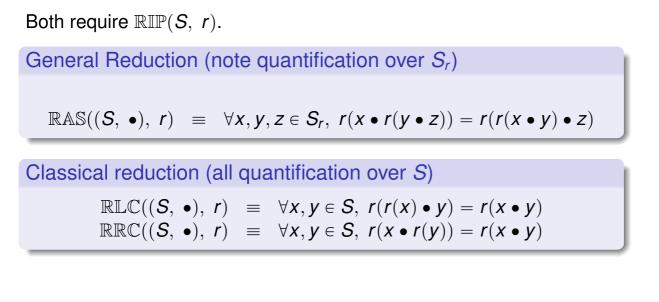
where

$$S_r \equiv \{s \in S \mid r(s) = s\}$$

$$x \bullet_r y \equiv r(x \bullet y)$$

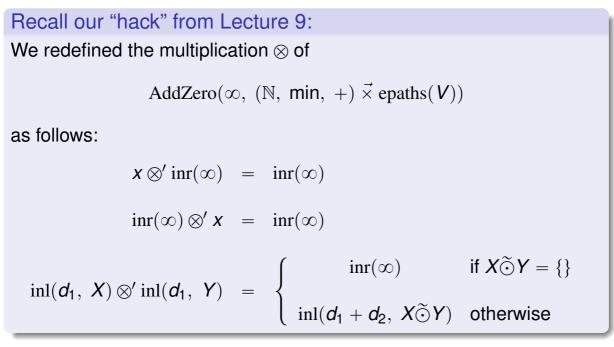
◆□ ▶ ◆ □ ▶ ◆ □ ▶ ◆ □ ▶ ◆ □ ▶

General vs classical reductions



	<	ロン・西と・国と、国と、国	$\mathcal{O}\mathcal{Q}\mathcal{O}$
tgg22 (cl.cam.ac.uk)	L11: Algebraic Path Problems with applica	T.G.Griffin©2018	3 / 10

Example of a non-classical reduction?

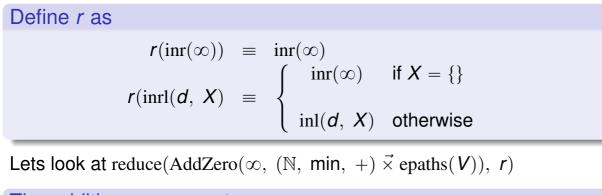


Ah, can we do this as a reduction?

< ロ > < 同 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ >

Sar

Example of a non-classical reduction?



The additive component:

$$S_r \equiv ((\mathbb{N} \times \mathcal{P}_{\text{fin}}(\text{elem}(V))) \uplus \{\infty\})_r$$

$$\bigoplus_r \equiv ((\min \vec{x} \cup)^{\text{id}}_{\infty})_r$$



Example of a non-classical reduction?

Let's construct a violation of

$$\mathbb{RLC}((S, \oplus), r) \equiv \forall x, y \in S, r(r(x) \oplus y) = r(x \oplus y)$$

Suppose d < d' and $X \neq \{\}$, then let

$$\begin{array}{rcl} x &\equiv & \operatorname{inl}(d, \ \}) \\ y &\equiv & \operatorname{inl}(d', \ X) \\ \overline{\infty} &\equiv & \operatorname{inr}(\infty) \end{array}$$

then

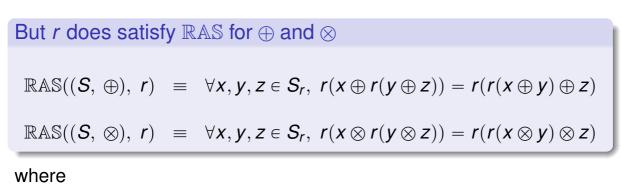
lhs
$$\equiv$$
 $r(r(x) \oplus y) = r(\overline{\infty} \oplus y) = r(y) = y$
rhs \equiv $r(x \oplus y) = r(x) = \overline{\infty}$

This gives us an example that violates associativity:

$$(\mathbf{X} \oplus_r \overline{\infty}) \oplus_r \mathbf{y} \neq \mathbf{X} \oplus_r (\overline{\infty} \oplus_r \mathbf{y})$$

			D Q (P
tgg22 (cl.cam.ac.uk)	L11: Algebraic Path Problems with applica	T.G.Griffin©2018	6 / 10

Example of a non-classical reduction?



$$\otimes \equiv ((+\times \widetilde{\odot})^{\mathrm{ann}}_{\infty})$$



However, distributivity is lost!

In general, we want for all
$$a, b, c \in S_r$$

 $a \otimes_r (b \oplus_r c) = (a \otimes_r b) \oplus_r (a \otimes_r c)$
That is
 $r(a \otimes r(b \oplus c)) = r(r(a \otimes b) \oplus r(a \otimes c))$

Construct a counterexample:

- Ihs : Suppose $b \oplus c = b$, r(b) = b and $r(a \otimes b) = \overline{\infty}$ becaue of a loop.
- rhs :

 $r(r(a \otimes b) \oplus r(a \otimes c)) = r(\overline{\infty} \oplus r(a \otimes c)) = r(r(a \otimes c)) = r(a \otimes c),$ and suppose $a \otimes c$ is loop-free.

• Then lhs \pm rhs.

Fully reduced semigroup.

If $(S, =, \bullet)$ is semigroup and $r \in S \to S$, then define

fullReduce $((\boldsymbol{S}, =, \bullet), r) \equiv (\boldsymbol{S}, =^{r}, \bullet^{r})$

where we assume $\mathbb{RIP}(S, r)$ and define

$$s = r s' \equiv r(s) = r(s')$$

 $x \bullet r y \equiv r((r(x) \bullet r(y)))$

Remarks

- Easy to show that $(S, =^{r})$ is an equivalence relation iff $(S_{r}, =)$ is an equivalence relation (proof requires $\mathbb{RIP}(S, r)$).
- In standard programming languages (those without dependent types) it is much easier to implement fullReduce((S, =, •), r) than reduce((S, =, •), r).

tgg22 (cl.cam.ac.uk)	L11: Algebraic Path Problems with applica	T.G.Griffin©2018	9 / 10

Associativity?

Fact $\mathbb{AS}(\text{reduce}((S, =, \bullet), r)) \leftrightarrow \mathbb{AS}(\text{fullReduce}((S, =, \bullet), r))$

Proof is rather tedious: It relies heavily on $\mathbb{RIP}(S, r)$ and congruences:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{RCONG}(S,\ =,\ r) &\equiv & \forall s_1, s_2 \in S, s_1 = s_2 \rightarrow r(s_1) = r(s_2) \\ \mathbb{CONG}(S,\ =,\ \bullet) &\equiv & \forall s_1, s_2, s_3, s_4 \in S, \\ & (s_1 = s_2 \land s_3 = s_4) \rightarrow s_1 \bullet s_3 = s_2 \bullet s_4 \end{array}$$

▲□▶▲□▶▲≡▶▲≡▶ = ∽000

< □ ▶ < □ ▶ < Ξ ▶ < Ξ ▶ Ξ • のへの