Signature 1. Let L be a list. $\mathsf{rev}(L)$ is a list.

Axiom 2. Let L be a list. Then $\mathsf{rev}([]) = []$.

Axiom 3. Let a be an object and L be a list. Then $\mathsf{rev}(a :: L) = \mathsf{rev}(L) + [a]$.

Proposition 4. $\mathsf{rev}(L + L') = \mathsf{rev}(L') + \mathsf{rev}(L)$ for any lists L, L'.

Proof by induction on L. Let L, L' be lists.

Case $L = []$. □

Case $L = a :: L''$ for some object a and some list L''. Take an object a and a list L'' such that $L = a :: L''$. Then $L'' \prec L$. Hence $\mathsf{rev}(L'' + L') = \mathsf{rev}(L') + \mathsf{rev}(L'')$. Thus

$$\begin{aligned}
\mathsf{rev}(L + L') &= \mathsf{rev}((a :: L'') + L') \\
&= \mathsf{rev}(a :: (L'' + L')) \\
&= \mathsf{rev}(L'' + L') + [a] \\
&= (\mathsf{rev}(L') + \mathsf{rev}(L'')) + [a] \\
&= \mathsf{rev}(L') + (\mathsf{rev}(L'') + [a]) \\
&= \mathsf{rev}(L') + \mathsf{rev}(a :: L'') \\
&= \mathsf{rev}(L') + \mathsf{rev}(L)
\end{aligned}$$

. Indeed $(\mathsf{rev}(L') + \mathsf{rev}(L'')) + [a] = \mathsf{rev}(L') + (\mathsf{rev}(L'') + [a])$ (by associativity of concatenation). □

■

Proposition 5. $\mathsf{rev}(\mathsf{rev}(L)) = L$ for every list L.

Proof by induction on L. Let L be a list.

Case $L = []$.□

Case $L = a :: L'$ for some object a and some list L'. Take an object a

and a list L' such that $L = a :: L'$. Then $L' \prec L$. Hence $\mathsf{rev}(\mathsf{rev}(L')) = L'$. Thus

$$\begin{aligned}
\mathsf{rev}(\mathsf{rev}(L)) &= \mathsf{rev}(\mathsf{rev}(a :: L')) \\
&= \mathsf{rev}(\mathsf{rev}(L') + [a]) \\
&= \mathsf{rev}([a]) + \mathsf{rev}(\mathsf{rev}(L')) \\
&= a :: \mathsf{rev}(\mathsf{rev}(L')) \\
&= a :: L' \\
&= L
\end{aligned}$$

. $\square$

$\blacksquare$