Déduction naturelle

1 Déduction naturelle intuitionniste

Question 1. *Rappeler les règles de NJ.*

Question 2. *Prouver les formules suivantes dans NJ.*

$$P \wedge Q \leftrightarrow Q \wedge P \quad P \vee Q \leftrightarrow Q \vee P$$

$$P \wedge (Q \vee R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \quad P \vee (Q \wedge R) \leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

$$\neg P \vee \neg Q \rightarrow \neg(P \wedge Q) \quad \neg(P \vee Q) \leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \quad \neg P \vee Q \rightarrow (P \rightarrow Q)$$

$$P \rightarrow \neg\neg P \quad \neg\neg\neg P \rightarrow \neg P \quad (P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$$

Question 3. *Qu'est-ce qu'il faut vérifier pour prouver que $\Gamma \vdash_{NJ} P$ en déduction naturelle est équivalent à $\vdash_{\Gamma_1 \cup \Gamma} P$ dans un système à la Hilbert ?*

2 Déduction naturelle classique

Question 4. *Pour obtenir NK à partir de NJ, il suffit de rajouter le tiers-exclus, la contraposition, la loi de Peirce ou le principe de double-négation. Formalisez ces règles et démontrez qu'elles sont équivalentes.*

Question 5. *Prouver $\neg(P \wedge Q) \vdash_{NK} \neg P \vee \neg Q$.*

3 Théorème de compacité

On dit qu'un ensemble Γ de formules est satisfiable si et seulement s'il existe un modèle $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \models \Gamma$.

Question 6. *Prouver que Γ n'est pas satisfiable est équivalent à $\Gamma \vdash \bot$.*

Question 7. *Prouver que tout ensemble est satisfiable si et seulement si toutes ses parties finies sont satisfiables.*

Une petite remarque en passant pour les plus matheux d'entre vous, le mot *compacité* n'est pas usurpée : il en existe une autre démonstration simple qui utilise le théorème de Tychonoff (le produit d'espaces compacts est compact) et qui n'utilise pas le théorème de complétude (et donc qui ne nécessite pas d'introduire les systèmes de déduction) (voir le tome 1 de "Logique mathématique" de Cori et Lascar pour les curieux).

4 Traduction de Gödel

On rappelle la traduction de P^* d'une formule P.

$$\begin{array}{rcl} X^* & = & \neg\neg X \\ \top^* & = & \top \\ \bot^* & = & \bot \\ (P \wedge Q)^* & = & P^* \wedge Q^* \\ (P \vee Q)^* & = & \neg\neg(P^* \vee Q^*) \\ (P \rightarrow Q)^* & = & P^* \rightarrow Q^* \end{array}$$

Question 8. *Montrer que* $\vdash_{NK} P \leftrightarrow P^*$.

On dit d'une formule P qu'elle est stable si $\vdash_{NJ} P \leftrightarrow \neg\neg P$.

Question 9. *Montrer que pour tout* P, $\perp$, $\neg P$ *et* P^* *sont stables.*

Question 10. *Montrer que pour tout* P, $\Gamma \vdash_{NK} P$ *si et seulement si* $\Gamma^* \vdash_{NJ} P^*$.

5 Isomorphisme de Curry-Howard dans NJ

Question 11. *Vous avez vu en cours l'isomorphisme de Curry-Howard pour le fragment minimal de* NJ. *Étendez-le à tout* NJ. *À quoi correspondent vos coupures ?*

6 Modèles topologiques

On se propose dans cette dernière section de construire une notion de modèle qui sera correcte vis-à-vis de NJ et pas avec NK. Soit E un espace topologique (si vous ne savez pas ce qu'est un espace topologique vous pouvez prendre $E = \mathbb{R}$). Un modèle $\mathcal{M}$ sera ici une fonction $\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{O}_E$ de l'ensemble des variables dans l'ensemble $\mathcal{O}_E$ des ouverts de E. On notera $[\![X]\!]_{\mathcal{M}}$ l'image $\mathcal{M}(X)$ d'une variable X par un modèle $\mathcal{M}$.

Question 12. *Généralisez cette notation à toutes les formules (attention, si vous n'arrivez pas à résoudre les questions suivantes c'est peut-être qu'il faut revoir votre définition).*

On dira qu'une formule P est *valide* dans un modèle $\mathcal{M}$ si $[\![P]\!]_{\mathcal{M}} = E$. On notera $\mathcal{M} \models P$ si P est valide dans $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M} \models \Gamma$ si $\bigcap_P [\![P]\!]_{\mathcal{M}} = E$ pour tout $P \in E$.

Question 13. *Construisez un modèle* $\mathcal{M}$ *(dans le cas* $E = \mathbb{R}$*) tel que l'on n'ait pas* $\mathcal{M} \models X \vee \neg X$.

Question 14. *Prouvez que ces modèles sont corrects vis-à-vis de* NJ *: pour tout* Γ, $\Gamma \vdash Q$ *implique* $\bigcap_{P\in\Gamma} [\![P]\!]_{\mathcal{M}} \subseteq [\![Q]\!]_{\mathcal{M}}$.

Question 15. *En déduire, que le tiers-exclus n'est pas prouvable dans* NJ.

Question 16. *(pour ceux qui savent un peu de topologie) Construisez une topologie où ces modèles sont équivalents aux modèles booléens.*

Question 17. *(difficile[1]) Est-ce qu'il existe une topologie dans laquelle cette notion de modèles est complète ? Prouvez-le. Est-ce que ça marche avec* $E = \mathcal{R}$ *?*

[1]Un cadeau sera offert au premier qui répondra correctement à cette question