TD 8 : ultraproduits et ultrapuissances

Mathilde Noual, Marc Lasson

12 avril 2011

Ultrafiltres

Soit I un ensemble non vide. On dit qu'un ensemble $\mathcal{U} \subseteq \mathfrak{P}(I)$ de parties de I est un *filtre* sur I s'il satisfait les conditions suivantes :

$$\begin{array}{ll} (i) & I \in \mathcal{U} \text{ et } \emptyset \notin \mathcal{U}\,; \\ (iii) & \text{si } J \in \mathcal{U} \text{ et } J \subseteq J' \subseteq I, \text{ alors } J' \in \mathcal{U}\,; \\ (iv) & \text{si } J_1, J_2 \in \mathcal{U}, \text{ alors } J_1 \cap J_2 \in \mathcal{U}. \end{array}$$

De plus, un *ultrafiltre* est un filtre tel que

$$(iv) \text{ pour tout } J \subseteq I : \quad (I \setminus J) \in \mathcal{U} \text{ si et seulement si } J \notin \mathcal{U}.$$

Question 0 Soit $\mathcal{U}_x = \{E \subseteq I | x \in E\}$ le filtre engendré par un élément $x \in I$. Montrer que $\mathcal{U}_x$ est un ultrafiltre. On dira d'un tel ultrafiltre qu'il est principal.

Question 1 Vérifier que si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre, alors pour tous $J_1, J_2 \subseteq I$:

$$\begin{array}{lcl} (J_1 \cup J_2) \in \mathcal{U} & \text{ssi} & J_1 \in \mathcal{U} \text{ ou } J_2 \in \mathcal{U} \\ (J_1 \cap J_2) \in \mathcal{U} & \text{ssi} & J_1 \in \mathcal{U} \text{ et } J_2 \in \mathcal{U} \end{array}$$

Question 2 Si I est un infini, on appelle *filtre de Fréchet* sur I l'ensemble des parties de I de complémentaire fini. Montrer que dans ce cas tout ultrafiltre non-principal contient le filtre de Fréchet.

Ultraproduit d'une famille de $\mathcal{L}$-structures

Soient $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre, $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathcal{L}$-structures indicée par un ensemble non vide I et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur I. Pour tout indice $i \in I$, l'ensemble de base de la $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}_i$ est noté M_i. On considère l'ensemble produit $M = \prod_{i\in I} M_i$ constitué par toutes les fonctions u définies sur I et telles que $u(i) \in M_i$ pour tout $i \in I$. Cet ensemble est muni d'une relation binaire $u \sim v$ définie par

$$u \sim v \qquad \text{ssi} \qquad \{i \in I \ : \ u(i) = v(i)\} \in \mathcal{U}\,.$$

Question 3 Montrer que $u \sim v$ est une relation d'équivalence sur M.

On appelle l'*ultraproduit* de la famille $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ par l'ultrafiltre $\mathcal{U}$ la $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ dont l'ensemble de base est $M = \prod_{i\in I} M_i$ et dans laquelle :

- Chaque symbole de fonction f de $\mathcal{L}$ (d'arité k) est interprété par la fonction $f^{\mathcal{M}} : \mathcal{M}^k \to \mathcal{M}$ définie par $\big(f^{\mathcal{M}}(u_1, \dots, u_k)\big)(i) \;=\; f^{\mathcal{M}_i}(u_1(i), \dots, u_k(i))\,.$
- Chaque symbole de prédicat p de $\mathcal{L}$ (d'arité k) est interprété par la relation $\mathcal{M} \models p(u_1, \dots, u_k)$ définie par $\mathcal{M} \models p(u_1, \dots, u_k) \quad \text{ssi} \quad \{i \in I \ : \ \mathcal{M}_i \models p(u_1(i), \dots, u_k(i))\} \in \mathcal{U}\,.$

Dans le cas particulier où toutes les structures $\mathcal{M}_i$ sont identiques, on dit que $\mathcal{M}$ est une *ultrapuissance*. Pour tout $i \in I$, on note $\pi_i : M \to M_i$ la projection sur la composante d'indice i, qui est définie par $\pi_i(u) = u(i)$. On remarquera que si ρ est une valuation dans $\mathcal{M}$, alors $\pi_i \circ \rho$ est une valuation dans $\mathcal{M}_i$.

Question 4 Montrer que pour tout terme t, pour toute valuation ρ et pour tout indice $i \in I$ on a : $\pi_i([\![t]\!]_\rho^{\mathcal{M}}) = [\![t]\!]_{\pi_i \circ \rho}^{\mathcal{M}_i}$. On raisonnera par induction sur la structure de t, en détaillant les différents cas.

Question 5 (théorème de Łoš) Montrer que pour toute formule A, pour toute valuation ρ et pour tout $i \in I$ on a $\mathcal{M} \models A[\rho]$ si et seulement si $\{i \in I : \mathcal{M}_i \models A[\pi_i \circ \rho]\} \in \mathcal{U}$. On raisonnera par induction sur la structure de A, en détaillant les cas-clé.

Question 6 Soit $\mathcal{T}$ une théorie sur le langage $\mathcal{L}$. Déduire de ce qui précède que si $\mathcal{M}_i$ est un modèle de $\mathcal{T}$ pour tout indice $i \in I$, alors l'ultraproduit $\mathcal{M}$ est également un modèle de $\mathcal{T}$ (en particulier, les ultrapuissances d'un modèle lui sont toutes élémentairement équivalentes).

Question 7 Dans le cas où $\mathcal{T}$ est une théorie égalitaire et où les modèles $\mathcal{M}_i$ sont tous égalitaires, par quelle relation d'équivalence sur $\mathcal{M}$ le symbole d'égalité est-il interprété ?

Théorème de compacité

Dans cette section, on se propose de donner une démonstration alternative du théorème de compacité qui n'invoque pas le théorème de complétude. Mais avant cela nous avons besoin d'une dernière petite définition. On appelle *base de filtre* sur I, toute partie B non-vide des parties non-vides de I, telle que pour $u, v \in B$, il existe $w \in B$ tel que $w \subseteq u \cap v$.

Question 8 Montrer que si B est une base de filtre sur I, alors $\{J \subseteq I | \exists K \in B, K \subseteq J\}$ est un filtre (on l'appelle le filtre engendré par B).

Question 9 Montrer qu'un filtre maximal par inclusion est un ultrafiltre.
Puis, en vous appuyant sur le lemme de Zorn [1] :

Un ensemble ordonné tel que toute chaîne (sous-ensemble totalement ordonné) possède un majorant, alors il possède un élément maximal.

montrer que tout filtre est contenu dans un ultrafiltre.

Question 10 Soit $\mathcal{T}$ une théorie dont toutes les parties finies admettent un modèle et I l'ensemble des parties finies de $\mathcal{T}$. On pose $Y_j = \{k \in I | j \subseteq k\}$. Montrer que $B = \{Y_j | j \in I\}$ est une base de filtre sur I. Conclure.

Un modèle non standard de PA

On reprend la construction qui précède dans le cas particulier où $I = \mathbb{N}$ et $\mathcal{M}_i = \mathcal{N}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, où $\mathcal{N}$ désigne le modèle standard de PA (dont l'ensemble de base est $\mathbb{N}$). Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$ qui contient le filtre de Fréchet. On note :

- $\mathcal{M}$ l'ultrapuissance définie précédemment, dont l'ensemble de base est ici l'ensemble $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ des suites d'entiers. Il s'agit d'un modèle de PA.
- $\mathcal{M}'$ le modèle égalitaire obtenu en effectuant le quotient de $\mathcal{M}$ par la relation d'équivalence $\sim$ (ici sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$) définie précédemment.

Question 11 Quels sont les entiers standards dans le modèle $\mathcal{M}'$?

Question 12 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathsf{id} \not\sim \mathbf{K}n$, où $\mathsf{id} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ désigne la fonction identité sur $\mathbb{N}$ et où $\mathbf{K}n$ désigne la fonction constante égale à n. En déduire que le modèle $\mathcal{M}'$ est un modèle non standard de PA.

Question 13 (*) Quel est le cardinal de $\mathcal{M}'$?

1. What's sour, yellow, and equivalent to the axiom of choice ?