TD 6 : Théorie des modèles

Mathilde Noual, Marc Lasson

23 mars 2011

Exercice 1 : Compacité

1. Prouver que si un ensemble S de formules axiomatise une classe $\mathcal{K}$ de modèles finiment axiomatisable alors il existe une partie finie de S qui axiomatise $\mathcal{K}$.
2. Montrer que la classe des modèles infinis est axiomatisable mais pas finiment axiomatisable.
3. Montrer qu'une classe $\mathcal{K}$ est finiment axiomatisable si et seulement si $\mathcal{K}$ et son complémentaire sont axiomatisables.

Exercice 2 : La caractéristique des corps.

1. Montrer que la classe des corps de caractéristique p (> 0) est finiment axiomatisable.
2. Montrer que la classe des corps de caractéristique 0 est axiomatisable mais pas finiment.
3. Montrer qu'on ne peut pas axiomatiser les corps de caractéristique strictement positive.
4. Montrer que si un énoncé du premier ordre est satisfait par tous les corps de caractéristique 0, alors il l'est aussi pour tous les corps de caractéristique $q > p$ pour un certain $p > 0$.

Exercice 3 : Équivalence élémentaire

On fixe un langage L. On dit de deux modèles $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ qu'ils sont *élémentairement équivalents* s'ils satisfont les même formules. On note $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}'$. Par exemple dans le langage $<$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ sont élémentairement équivalent.

1. Plus généralement, prouvez que n'importe quel couple $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ de modèles d'une théorie complète (rappel : une théorie est *complète* si pour toute formule F, elle prouve F ou elle prouve $\neg F$) sont élémentairement équivalents.

En particulier, si on admet que la théorie des ordres linéaire denses

$$\forall x \neg(x < x) \quad \begin{array}{c} \forall xy(x = y \vee x < y \vee y < x) \\ \forall xy(x < y \rightarrow \exists z(x < z \wedge z < y)) \end{array} \quad \begin{array}{c} \forall xyz(x < y \wedge y < x \rightarrow x < z) \\ \forall x \exists z(z < x), \forall x \exists z(x < z) \end{array}$$

est complète, alors on obtient que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ sont élémentairement équivalents pour le langage $\{<\}$.

Deux modèles sont dits *équivalent* s'il existe une bijection ϕ entre les domaines qui préserve l'interprétation des fonctions et des relations :

$$\begin{array}{rcl} \phi([f]^{\mathcal{M}}(x_1, ..., x_n)) & = & [f]^{\mathcal{M}'}(\phi(x_1), ..., \phi(x_n)) \\ [R]^{\mathcal{M}}(x_1, ..., x_n) & \Leftrightarrow & [R]^{\mathcal{M}'}(\phi(x_1), ..., \phi(x_n)) \end{array}$$

On note $\mathcal{M} \cong \mathcal{M}'$.

2. Montrer que $\mathcal{M} \cong \mathcal{M}'$ implique $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}'$.
3. Montrer que si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ sont deux modèles égalitaires de cardinal fini, alors $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}'$ implique $\mathcal{M} \cong \mathcal{M}'$.

4. Trouver deux modèles $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ tel que l'on ait $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}'$ et pas $\mathcal{M} \cong \mathcal{M}'$.

   On dit qu'une théorie T est *catégorique* pour une classe de modèle $\mathcal{K}$ si tous les modèles de $\mathcal{K}$ qui satisfont T sont équivalents.
5. Montrer qu'une théorie avec un modèle infini ne peut pas être catégorique pour la classe de tous les modèles.

   Soit κ est un cardinal. On dit d'une théorie qu'elle est *κ-catégorique* si elle est catégorique pour la classe des modèles de cardinal κ.
6. Soit n un entier. Construire une théorie n-catégorique.
7. Construire une théorie κ-catégorique pour tout κ.
8. Supposons que le langage est dénombrable. Montrer que les théories ω-catégoriques qui n'ont aucun modèle fini sont complètes. Pourquoi cette dernière condition est nécessaire ?

Exercice 5 : Diagramme et extension

Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ deux modèles sur un langage L, on dit que $\mathcal{M}'$ est une extension de $\mathcal{M}$ si le domaine de $\mathcal{M}$ est inclus dans le domaine de $\mathcal{M}'$ et que l'interprétation des relations et des fonctions de L dans $\mathcal{M}$ est la restriction des interprétations des mêmes symboles dans $\mathcal{M}'$ au domaine de $\mathcal{M}$.

1. Montrer que les formules purement universelles satisfaites par $\mathcal{M}'$ le sont aussi par $\mathcal{M}$.

Soit L un langage et $\mathcal{M}$ un modèle sur L. On peut compléter L en $L_{\mathcal{M}}$ en rajoutant des symboles de constantes c_a pour chaque élément $a \in \mathcal{M}$ et étendre naturellement $\mathcal{M}$ en un modèle $\hat{\mathcal{M}}$ sur L_M en interprétant c_a par a. On appelle *diagramme* de $\mathcal{M}$, l'ensemble $\mathrm{Diag}_{\mathcal{M}}$ des formules de $L_{\mathcal{M}}$ constitué de

$$\begin{array}{rl} R(c_{a_1}, \ldots, c_{a_k}) & \text{pour } R \in L,\ a_1, \ldots, a_k \in \mathcal{M} \text{ avec } \hat{\mathcal{M}} \models R(c_{a_1}, \ldots, c_{a_k}) \\ \neg R(c_{a_1}, \ldots, c_{a_k}) & \text{pour } R \in L,\ a_1, \ldots, a_k \in \mathcal{M} \text{ avec } \hat{\mathcal{M}} \models \neg R(c_{a_1}, \ldots, c_{a_k}) \\ c_a = f(c_{a_1}, \ldots, c_{a_k}) & \text{pour } f \in L\ a, a_1, \ldots, a_k \in \mathcal{M} \text{ avec } \hat{\mathcal{M}} \models c_a = f(c_{a_1}, \ldots, c_{a_k}) \end{array}$$

2. Montrer qu'à isomorphisme près $\mathcal{M}$ est une extension de $\mathcal{M}'$ si et seulement si $\mathcal{M}' \models \mathrm{Diag}_{\mathcal{M}}$.

Exercice 6 : Existence d'une clôture algébrique

Soit K un corps commutatif.

1. Axiomatiser les extensions de corps de K.
2. Montrer (à l'aide du théorème de compacité) qu'il existe un extension L de K dans lequel tout polynôme à coefficients dans K se décompose en facteurs du premier degré.
3. $(*)$ Montrer que le sous-corps de L des éléments algébriques

$$\{x \in L | \exists P \in K[X], P \neq 0 \wedge P(x) = 0\}$$

   est une cloture algébrique de K.