TD 5

Exercice 1.
Dans les énoncés suivants, Σ est un ensemble de formules closes sur un langage $\mathcal{L}$ et σ est une formule close de $\mathcal{L}$.

1. Σ est ☹ ssi il existe une formule σ telle que $\Sigma \mathrel{|\!\sim} \sigma$ et $\Sigma \mathrel{|\!\sim} \neg\sigma$
   ssi pour toute formule σ telle que $\Sigma \mathrel{|\!\sim} \sigma$ et $\Sigma \mathrel{|\!\sim} \neg\sigma$.
2. $\Sigma \mathrel{|\!\sim} \sigma$ ssi $\Sigma \cup \{\neg\sigma\}$ est ☹.
3. (Finitude) Si $\Sigma \mathrel{|\!\sim} \sigma$ alors il existe un ensemble fini $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ tel que $\Sigma_0 \mathrel{|\!\sim} \sigma$.
4. (Compacité) Si pour tout ensemble fini $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, Σ_0 est ☺ alors, Σ est ☺.
5. (Complétude) Si Σ est cohérant (☺), Σ est satisfiable (☺).
6. (Complétude) Si $\Sigma \models \sigma$ alors $\Sigma \vdash \sigma$.

1. Prouver les 4 premiers énoncés syntaxiquement (☺ := cohérant, ☹ := contradictoire, $\mathrel{|\!\sim} := \vdash$) et prouver les 2 premiers énoncés sémantiquement (☺ := satisfaisable, ☹ := contradictoire, $\mathrel{|\!\sim} := \models$).

2. Prouver l'équivalence entre l'énoncé de finitude et celui de compacité.

3. Prouver l'équivalence entre les 2 énoncés de complétude.

4. Prouver la compacité (sémantique) à l'aide des autres énoncés (préciser lesquels).

On note PA l'arithmétique de Peano, $\mathcal{L}$ son langage, et PA_0 l'arithmétique de Peano sans schéma de récurrence. On rappelle que le modèle standard de PA est la $\mathcal{L}$-structure définie sur $\mathbb{N}$ où les symboles de $\mathcal{L}$ sont interprétés de la manière évidente (0 par 0, s par $n \mapsto n+1$, etc.) Dans tout ce qui suit, on ne considère que des modèles égalitaires.

Exercice 2. *Modèles de l'arithmétique*

Soit $\mathcal{M}$ un modèle égalitaire de l'arithmétique (PA). On considère l'application $\phi : \mathbb{N} \to \mathcal{M}$ définie par

$$\phi(0) = 0^{\mathcal{M}} \qquad \text{et} \qquad \phi(n+1) = s^{\mathcal{M}}(\phi(n)) \qquad\qquad (n \in \mathbb{N})$$

1. Montrer que ϕ est injective. Est-elle nécessairement surjective ?

Soit $\mathcal{M}_0 = \phi(\mathbb{N})$ l'image de $\mathbb{N}$ par ϕ.

2. Montrer que $\mathcal{M}_0$ est un sous-modèle de $\mathcal{M}$ isomorphe au modèle standard. (On rappelle qu'un sous-modèle de $\mathcal{M}$ est une sous-$\mathcal{L}$-structure qui est un modèle de la théorie considérée.)
3. En déduire que si l'application $\phi : \mathbb{N} \to \mathcal{M}$ est surjective, alors $\mathcal{M}$ est isomorphe au modèle standard.

On dit qu'un modèle $\mathcal{M}$ de PA est *non standard* si l'injection $\phi : \mathbb{N} \to \mathcal{M}$ n'est pas surjective.

4. Montrer que l'arithmétique admet un modèle non standard.
   (Indication : cf un certain exercice d'un certain td précédent)

Exercice 3. *Modèles non standard*

Soit $\mathcal{M}$ un modèle non standard de PA, et $\mathcal{M}_0 = \phi(\mathbb{N})$ le sous-modèle standard de $\mathcal{M}$ (isomorphe à $\mathbb{N}$ d'après l'exercice précédent), dont les éléments sont appelés les *éléments standard* de $\mathcal{M}$. Étant donnés deux éléments $x, y \in \mathcal{M}$, on note $x \leq^{\mathcal{M}} y$ s'il existe $z \in \mathcal{M}$ tel que $x +^{\mathcal{M}} z = y$.

1. Montrer que la relation $\leq^{\mathcal{M}}$ est une relation d'ordre total sur $\mathcal{M}$. Est-ce un bon ordre ? En déduire que $\mathcal{M}_0$ n'est pas définissable dans $\mathcal{M}$.
   (Indication : On pourra raisonner sur le plus petit entier x tel que $\neg A(x)$, où $A(x)$ est une formule définissant $\mathcal{M}_0$.)
4. Montrer que tout élément de $\mathcal{M}$ plus petit qu'un élément standard est lui-même un élément standard.
3. En déduire que si une formule $A(x)$ à une variable libre x est satisfaite par une infinité d'entiers standards dans $\mathcal{M}$, alors elle est satisfaite par au moins un entier non standard de $\mathcal{M}$.

Exercice 4. *Un autre modèle est possible*

Soient X un ensemble non vide et f une fonction de $X \times X$ dans X. On considère la $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ dont l'ensemble de base est $\mathcal{M} = \mathbb{N} \cup (X \times \mathbb{Z})$ et où les symboles de $\mathcal{L}$ sont interprétés de la manière suivante :
– $\mathcal{M}$ est une extension de $\mathbb{N}$;
– $s^{\mathcal{M}}(x, n) = (x, n+1)$
– $(x, n) +^{\mathcal{M}} m = m +^{\mathcal{M}} (x, n) = (x, n+m)$
– $(x, n) +^{\mathcal{M}} (y, m) = (y, n+m)$
– $0 \times (y, m) = 0$ et $n \times (y, m) = (y, n \times m)$ si $n \neq 0$
– $(x, n) \times^{\mathcal{M}} m = (x, nm)$
– $(x, n) \times^{\mathcal{M}} (y, m) = (f(x, y), nm)$
(pour tous $x, y \in X$, $n, m \in \mathbb{N}$).

1. Montrer que $\mathcal{M}$ est un modèle de PA_0.
2. Les formules suivantes sont-elles conséquence de PA_0 ?
$$\begin{array}{ll} \forall x\, \forall y\, (x + y = y + x) & \forall x\, \forall y\, \forall z\, (x \times (y \times z) = (x \times y) \times z) \\ \forall x\, (x \times 0 = 0) & \forall x\, \forall y\, (x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y) \end{array}$$
3. Construire un modèle de PA_0 dans lequel $+$ n'est pas associatif.

Exercice 5. *Structure des modèles non standard*

Soit $\mathcal{M}$ un modèle non standard de PA. On considère la relation binaire $x \cong y$ sur $\mathcal{M}$ définie par : $x \cong y$ ssi il existe deux éléments $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $x +^{\mathcal{M}} \phi(n) = y +^{\mathcal{M}} \phi(m)$.

1. Montrer que la relation $\cong$ est une relation d'équivalence.
2. Soient a, a', b et b' des éléments de $\mathcal{M}$, tels que $a \cong a'$ et $b \cong b'$. Montrer que $a +^{\mathcal{M}} b \cong a' +^{\mathcal{M}} b'$.

On appelle E l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{M}$ pour $\cong$. On définit sur E la relation R par : $x\ R\ y$ ssi il existe $a \in x$ et $b \in y$ tels que $\mathcal{M} \models a \leq b$.

3. Montrer que la relation R est une relation d'ordre total. Montrer que E, muni de cet ordre, a un plus petit élément mais pas de plus grand élément.
4. Vérifier que $\mathrm{PA} \vdash \forall x\, \exists y\, (x + x = y \ \vee\ x + x = y + 1)$. En déduire habilement que R est un ordre dense sur E.

Ce dernier point permet en fait d'établir qu'un modèle non standard dénombrable est isomorphe à $\mathbb{N} \cup (\mathbb{Q} \times \mathbb{Z})$.