TD 3 : Théories des ensembles

Mathilde Noual & Marc Lasson

24 février 2011

> *Il n'est sans doute pire infortune pour l'écrivain scientifique que de voir ruinée l'une des fondations de son édifice après que l'ouvrage a été achevé. Je viens pourtant de me retrouver dans cette situation après la réception d'une lettre de M. Bertrand Russell, au moment même où l'impression de ce volume touchait à sa fin. Il y est question de mon Axiome (V). Je ne me suis jamais caché à moi-même qu'il manquait de cette auto-évidence qui transparaît dans les autres axiomes et que l'on est en droit d'exiger d'une loi logique. De fait, j'avais déjà indiqué cette faiblesse dans la Préface au Volume I (p. VII). Je me serais volontiers dispensé de cette fondation si j'avais connu pour elle le moindre substitut.*
>
> *— Gottlob Frege, Grundgesetze der Arithmetik, II (1903).*

Exercice 1 : La théorie de Zermelo-Fraenkel

Les axiomes de la théorie des ensembles de Zermelo (Z) sont les axiomes d'égalité, l'axiome d'extensionnalité, l'axiome de la paire, le schéma de compréhension, l'axiome de l'union, l'axiome des parties et l'axiome de l'infini :

Extensionnalité	$\forall a\ \forall b\ (\forall x\,(x \in a \Leftrightarrow x \in b)\ \Rightarrow\ a = b)$
Paire	$\forall a\ \forall b\ \exists c\ \forall x\ (x \in c\ \Leftrightarrow\ x = a \vee x = b)$
Compréhension	$\forall a\ \exists b\ \forall x\ (x \in b\ \Leftrightarrow\ x \in a \wedge \phi(x))$
Union	$\forall a\ \exists b\ \forall x\ (x \in b\ \Leftrightarrow\ \exists y\,(y \in a \wedge x \in y))$
Parties	$\forall a\ \exists b\ \forall x\ (x \in b\ \Leftrightarrow\ x \subseteq a)$
Infini	$\exists a\ (\exists x \in a\ \forall z\, z \notin x\ \wedge$ $\forall x \in a\ \exists y \in a\ \forall z\ (z \in y \Leftrightarrow z \in x \vee z = x))$

(où $\phi(x)$ est n'importe quelle formule où b n'est pas libre.) Dans cet exercice, on travaille dans la théorie des ensembles sans axiome de l'infini.

1. Montrer à l'aide du schéma de compréhension et de l'axiome d'extensionnalité qu'il existe un unique ensemble vide : $\exists! a\ \forall z\ z \notin a$.

La théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel est obtenue en ajoutant à la théorie des ensembles de Zermelo le schéma de remplacement :

Remplacement	$\forall x\,\forall y\,\forall y'\,(\psi(x,y) \wedge \psi(x,y') \Rightarrow y = y')\ \Rightarrow$ $\forall a\ \exists b\ \forall y\ (y \in b\ \Leftrightarrow\ \exists x\ (x \in a \wedge \psi(x,y)))$

(où $\psi(x, y)$ est n'importe quelle formule où b n'est pas libre.)

2. Montrer que le schéma de remplacement entraîne le schéma de compréhension (en présence des axiomes d'égalité).
3. Montrer que le schéma de remplacement et l'axiome des parties entraînent l'axiome de la paire. (Indication : on commencera par montrer l'existence d'un ensemble à deux éléments distincts.)

Exercice 2 : Extension définitionnelle

Soit $\mathcal{T}$ une théorie sur un langage $\mathcal{L}$, contenant une théorie égalitaire compatible avec tous les symboles de fonctions de $\mathcal{L}$ et telle que $\mathcal{T} \vdash \forall x_1 ... x_n \exists! y A(x_1, ..., x_n, y)$. On dit que que

$$\mathcal{T}^+ = \mathcal{T}, \forall x_1 ... x_n A(x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n))$$

est un *extension définitionnelle* (de A) sur $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L} + f$ (où f est un symbole de fonction frais).

1. Montrer que

$$\mathcal{T}^+ \vdash \forall x_1 ... x_n x_1' ... x_n', x_1 = x_1' \to ... \to x_n = x_n' \to f(x_1, ..., x_n) = f(x_1', ..., x_n').$$

On définit par induction sur la structure d'un terme t une formule qu'on notera $z \doteq t$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} z \doteq x \quad &\equiv \quad z = x \\ z \doteq h(t_1, ..., t_k) \quad &\equiv \quad \exists x_1 ... x_k, z = h(x_1, ..., x_k) \wedge \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq k} x_i \doteq t_i \right) \text{ avec } h \neq f \\ z \doteq f(t_1, ..., t_n) \quad &\equiv \quad \exists x_1 ... x_k, A(x_1, ..., x_n, z) \wedge \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq n} x_i \doteq t_i \right) \end{aligned}$$

2. Montrer que $\mathcal{T}^+ \vdash z \doteq t \Leftrightarrow z = t$.
3. Trouver une façon d'associer à toute formule φ de $\mathcal{L}^+$ une formule φ^* de $\mathcal{L}$ telle que $\mathcal{T}^+ \vdash \varphi \Leftrightarrow \varphi^*$.
4. Montrer que $\mathcal{T} \vdash \varphi^* \Leftrightarrow \varphi$ si f n'apparait pas dans φ.
5. Montrer que $\mathcal{T}^+ \vdash \varphi$ implique $\mathcal{T} \vdash \varphi^*$.
6. En déduire que $\mathcal{T}^+$ est une extension conservative de $\mathcal{T}$.

On se place maintenant dans la théorie des ensembles de Zermelo Z (donc $\mathcal{L} = \{\{\in, =\}, \{f\}\}$, et on note $Z' = Z^+, \forall a \; \exists b \; \forall x \; (x \in b \;\Leftrightarrow\; x \in a \wedge \phi(x))$ avec $\varphi \in \mathcal{L}^+$ (où $\phi(x) \in \mathcal{L}^+$ où b n'est pas libre.)

7. Montrer que Z' est une extension conservative de Z.

Exercice 3 : La théorie des ensembles finis

On travaille à présent dans l'arithmétique de Peano étendue avec un symbole de fonction unaire exprimant la fonction $y = 2^x$ et les axiomes $2^0 = 1$ et $\forall x\, (2^{s(x)} = 2 \times 2^x)$. On admettra que cette extension est une extension conservative de l'arithmétique usuelle.

1. Écrire dans ce langage une formule à deux variables libres x et y exprimant que ≪ le chiffre de rang x dans l'écriture en base 2 de y est 1 ≫. Dans ce qui suit, on notera cette formule $x \in y$.
2. Montrer que $\quad \mathrm{PA} \vdash \forall a\ \forall b\ (\forall x\, (x \in a \Leftrightarrow x \in b) \Rightarrow a = b)$
   Comment interpréter cette formule ?
3. Montrer qu'à travers ce codage de l'appartenance, l'axiome de la paire, le schéma de compréhension, l'axiome de l'union, l'axiome des parties et le schéma de remplacement sont dérivables dans PA.
4. En déduire que si PA est une théorie cohérente, alors ZF sans axiome de l'infini est cohérent également.
5. Avec ce codage, peut-on dériver l'axiome de l'infini ? Sa négation ?
6. En déduire que si PA est cohérente, alors l'axiome de l'infini ne peut pas être déduit des autres axiomes de ZF.

Exercice 4 : Une arithmétique non standard

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{T}_n$ la théorie du premier ordre dont le langage est le langage de l'arithmétique de Peano étendu avec un nouveau symbole de constante c et dont les axiomes sont :

– les axiomes de PA, où le schéma de récurrence est étendu à toutes les formules du nouveau langage (i.e. contenant la constante c) ;
– les axiomes $c \neq 0$, $c \neq 1$, ..., $c \neq s^n 0$.

Enfin, on note $\mathcal{T}_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_n$ la théorie limite.

1. Montrer que si PA est cohérente, alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la théorie $\mathcal{T}_n$ est cohérente également. (Pour cela, on montrera que toute incohérence de $\mathcal{T}_n$ peut être transformée en une incohérence de PA.)
2. En déduire que $\mathcal{T}_\infty$ est cohérente (si PA l'est).
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{T}_\infty \vdash n < c$.
4. Montrer que $\mathcal{T}_\infty \vdash \exists x\, c = s(x)$ et $\mathcal{T}_\infty \vdash \exists y\, (c = 2y \vee c = 2y + 1)$.
5. Que peut-on dire (dans $\mathcal{T}_\infty$) de la parité de c ? de sa primalité ?