TD 2

1 L'arithmétique de Peano

On rappelle les axiomes de l'arithmétique de Peano (PA) :

Axiomes d'égalité
1. $\forall x\,(x = x)$
2. $\forall x\,\forall y\,\forall z\,(x = y \wedge x = z \Rightarrow y = z)$
3. $\forall x\,\forall x'\,(x = x' \Rightarrow s(x) = s(x'))$
4. $\forall x\,\forall x'\,\forall y\,(x = x' \Rightarrow x + y = x' + y)$
5. $\forall x\,\forall y\,\forall y'\,(y = y' \Rightarrow x + y = x + y')$
6. $\forall x\,\forall x'\,\forall y\,(x = x' \Rightarrow x \times y = x' \times y)$
7. $\forall x\,\forall y\,\forall y'\,(y = y' \Rightarrow x \times y = x \times y')$

Axiomes de calcul

8. $\forall y\,(0 + y = y)$
9. $\forall x\,\forall y\,(s(x) + y = s(x + y))$
10. $\forall y\,(0 \times y = 0)$
11. $\forall x\,\forall y\,(s(x) \times y = (x \times y) + y)$

Axiomes de Peano

12. $\forall x\,\forall y\,(s(x) = s(y) \Rightarrow x = y)$
13. $\forall x\,\neg(s(x) = 0)$
14. $\forall x_1 \cdots \forall x_n\,(A\{x := 0\}\ \wedge\ \forall x\,(A \Rightarrow A\{x := s(x)\})\ \Rightarrow\ \forall x\,A)$
    pour toute formule A telle que $FV(A) \subseteq \{x_1; \ldots; x_n; x\}$

Exercice 1. *Principe de Leibniz*

Montrer que pour tout terme t et pour toute formule A de l'arithmétique :
1. PA $\vdash\ \ x = y\ \Rightarrow\ t\{z := x\} = t\{z := y\}$
2. PA $\vdash\ \ x = y\ \Rightarrow\ (A\{z := x\} \Leftrightarrow A\{z := y\})$

Exercice 2. *Ordre sur les entiers*

Dans l'arithmétique de Peano, on définit l'ordre sur les entiers naturels par $x \leq y \equiv \exists z\,(x+z = y)$, et on note $x < y \equiv s(x) \leq y$. Montrer dans PA que :
1. $x \leq y$ est réflexive, transitive et antisymétrique (ordre).
2. $x < y$ est irréflexive et transitive (ordre strict).

Exercice 3. *Parité*

Montrer dans PA $\forall x,\ \exists y\ ((x = 2 \times y) \vee (x = 2 \times y + 1))$

Exercice 4. *Induction forte et bon ordre*

Soit $A(x)$ une formule dépendant d'une variable libre x. Montrer que dans PA, les formules suivantes sont prouvables :
1. $\forall x\,(\forall y\,(y < x \Rightarrow A(y)) \Rightarrow A(x))\ \Rightarrow\ \forall x\,A(x)$
2. $\exists x\,A(x)\ \Rightarrow\ \exists x_0\,(A(x_0)\ \wedge\ \forall x\,(A(x) \Rightarrow x_0 \leq x))$

Exercice 5. *Le théorème d'Euclide*

Démontrer dans PA le théorème d'Euclide : $\forall x\ \exists y\ (x \leq y \wedge \mathrm{prime}(y))$. où $\mathrm{prime}(x)\ \equiv\ x \neq 1\ \wedge\ \forall y \forall z\,(x = y \times z \Rightarrow y = 1 \vee z = 1)$.

2 Théories des ensembles

On rappelle que le *langage de la théorie des ensembles* est le langage du 1er ordre construit sur les seuls symboles de prédicat $=$ et $\in$. (Il n'y a donc ni symbole de constante ni symbole de fonction dans ce langage.) La relation d'inclusion est définie par $x \subseteq y \equiv \forall z\,(z \in x \Rightarrow z \in y)$.

Question préliminaire : Écrire les axiomes d'égalité correspondant au langage de la théorie des ensembles.

Exercice 6. *La théorie de Frege*

Les axiomes de la théorie des ensembles de Frege (ou : "théorie des ensembles naïve") sont les axiomes d'égalité, l'axiome d'extensionnalité et le schéma de compréhension non borné :

EXTENSIONNALITÉ	$\forall a\,\forall b\,(\forall x\,(x \in a \Leftrightarrow x \in b) \;\Rightarrow\; a = b)$
COMPRÉHENSION NON BORNÉE	$\exists a\,\forall x\,(x \in a \Leftrightarrow \phi(x))$

(où $\phi(x)$ est n'importe quelle formule où a n'est pas libre).

1. Dériver formellement le théorème $\perp$ dans cette théorie (antinomie de Russell). La preuve est-elle classique ou intuitionniste ?

Exercice 7. *La théorie de Zermelo-Fraenkel*

Les axiomes de la théorie des ensembles de Zermelo (Z) sont les axiomes d'égalité, l'axiome d'extensionnalité, l'axiome de la paire, le schéma de compréhension, l'axiome de l'union, l'axiome des parties et l'axiome de l'infini :

EXTENSIONNALITÉ	$\forall a\,\forall b\,(\forall x\,(x \in a \Leftrightarrow x \in b) \;\Rightarrow\; a = b)$
PAIRE	$\forall a\,\forall b\,\exists c\,\forall x\,(x \in c \;\Leftrightarrow\; x = a \lor x = b)$
COMPRÉHENSION	$\forall a\,\exists b\,\forall x\,(x \in b \;\Leftrightarrow\; x \in a \land \phi(x))$
UNION	$\forall a\,\exists b\,\forall x\,(x \in b \;\Leftrightarrow\; \exists y\,(y \in a \land x \in y))$
PARTIES	$\forall a\,\exists b\,\forall x\,(x \in b \;\Leftrightarrow\; x \subseteq a)$
INFINI	$\exists a\,(\exists x \in a\,\forall z\, z \notin x \;\land$ $\forall x \in a\,\exists y \in a\,\forall z\,(z \in y \Leftrightarrow z \in x \lor z = x))$

(où $\phi(x)$ est n'importe quelle formule où b n'est pas libre.) Dans cet exercice, on travaille dans la théorie des ensembles sans axiome de l'infini.

1. Montrer à l'aide du schéma de compréhension et de l'axiome d'extensionnalité qu'il existe un unique ensemble vide : $\exists! a\,\forall z\; z \notin a$.

La théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel est obtenue en ajoutant à la théorie des ensembles de Zermelo le schéma de remplacement :

REMPLACEMENT	$\forall x\,\forall y\,\forall y'\,(\psi(x,y) \land \psi(x,y') \Rightarrow y = y') \;\Rightarrow$ $\forall a\,\exists b\,\forall y\,(y \in b \;\Leftrightarrow\; \exists x\,(x \in a \land \psi(x,y)))$

(où $\psi(x,y)$ est n'importe quelle formule où b n'est pas libre.)

2. Montrer que le schéma de remplacement entraîne le schéma de compréhension (en présence des axiomes d'égalité).

3.Montrer que le schéma de remplacement et l'axiome des parties entraînent l'axiome de la paire. (Indication : on commencera par montrer l'existence d'un ensemble à deux éléments distincts.)