TD 14

Mathilde Noual, Marc Lasson

Les ω-cpos forment une Catégorie Cartésienne Close

On considère ici les ω-cpos avec élément minimal.

1. Montrer que la fonction Id_D sur un cpo D est une fonction continue et que la composée de deux fonctions continues est continue.
2. On note $[A \to B]$ l'ensemble des fonctions continues entre deux cpos A et B. Montrer qu'il est également ω-cpo.
3. On note $A \times B$ le produit cartésien entre deux ω-cpos, montrer qu'il est également un ω-cpo.
4. Prouvez que $f \in [A \times B \to C]$ est continue si et seulement si pour toute chaîne $x \in A^{\mathbb{N}}$, $y \in B^{\mathbb{N}}$ on ait :
$$f(\sup x, \sup y) = \sup f(x \times y).$$
5. Soit A un ω-cpo et Y la fonction qui a une fonction continue de $[A \to A]$ associe son plus petit point fixe. Prouvez que $Y \in [[A \to A] \to A]$.
6. Soit A, B, C trois ω-cpos. Construisez deux fonctions $\mathbf{Ev}_{A,B} \in [[A \to B] \times A \to B]$ et $\Lambda_{A,B,C} \in [[A \times B \to C] \to [A \to [B \to C]]$ qui correspondent à l'évaluation d'une fonction et à la curryfication. Il faut montrer qu'elles sont continues !
Vos fonctions devront être suffisamment naturelles pour satisfaire les axiomes suivants.
$$\begin{array}{rcl} \Lambda_{A,B,C}(f) \circ g & = & \Lambda_{A',B,C}(f \circ < g \circ \pi_1, \pi_2 >) \\ \mathbf{Ev}_{B,C} \circ < \Lambda_{A,B,C}(f) \circ \pi_1, \pi_2 > & = & f \\ \Lambda_{[A \to B],A,B}(\mathbf{Ev}_{A,B}) & = & \mathrm{Id}_{[A \to B]} \end{array}$$
où $f : A \times B \to C$ et $g : A' \to A$ et où pour toutes fonctions $h_1 : X \to Y_1$, $h_2 : X \to Y_2$ on définit $< h_1, h_2 >: X \to Y_1 \times Y_2$ par $x \mapsto (h_1(x), h_2(x))$.
On vérifiera au passage que, dans chaque égalité, le membre droit et le membre gauche appartiennent au même ensemble de fonctions continues.

Interprétation fonctionnelle

On considère le langage de terme suivant.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} t & := & \mathbf{T} & \mid & \mathbf{F} & \mid & n & \mid & x & \mid & \lambda x.t & \mid & (t_1, t_2) \\ & \mid & \pi_1(t) & \mid & \pi_2(t) & \mid & (t_1\, t_2) & \mid & t_1 =_{\text{nat}} t_2 & \mid & \mathbf{rec} x.t & \mid & \text{if } t_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3 \end{array}$$

Question 1. *Donnez des règles de réduction pour ce calcul, un système de typage. On admettra toutes les bonnes propriétés syntaxiques de ce calcul (confluence, lemme de substitution, préservation du typage, ...).*

Question 2. *Programmez la fonction prédécesseur, l'addition ou une fonction rigolote de votre choix.*

Question 3. *Concevez une sémantique dénotationnelle $[\![\tau]\!]$ pour les types de ce système.*

Question 4. *Essayer d'associer à chaque séquent de typage $x_1 : \tau_1, ..., x_n : \tau_n \vdash t : \tau$ un élément $[\![x_1 : \tau_1, ..., x_n : \tau_n \vdash t : \tau]\!] \in [\times_{i=1..n}[\![\tau_i]\!] \to [\![\tau]\!]]$.*

Question 5. *Donnez les dénotations de* $(\lambda x.x)\,\Omega$ *et de* $(\lambda x.\lambda y.y)\,\Omega$ *avec* $\Omega = \mathbf{rec} w.w$.

Question 6. *Démontrez que* $t_1 \to t_2$ *implique* $[\![t_1]\!] = [\![t_2]\!]$.

Question 7. *Montrez que pour un terme clôt* $\vdash t : \mathbf{int}$ *que* $t \to^\star n$ *si et seulement si pour tout* ϱ, $[\![t]\!]\varrho = \lceil n \rceil$.

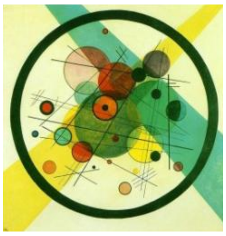
Full abstraction

Étant donné deux termes t_1 et t_2 de même type τ dans un contexte Γ, on dit qu'ils sont *observationnellement équivalents* si et seulement si il n'existe pas de contexte clos $C[]$ de type bool avec un trou de type τ typable, tel que $C[t_1]$ et $C[t_2]$ sont clos, $C[t_1]$ n'est pas normalisable et $C[t_2]$ est normalisable. On note $t_1 \sim t_2$.

On dit d'une sémantique $[\![\cdot]\!]$ qu'elle est *fully abstract* (*pleinement abstraite* ?) si $[\![t_1]\!] = [\![t_2]\!] \Leftrightarrow t_1 \sim t_2$.

Question 8. *Montez qu'on a* $[\![t_1]\!] = [\![t_2]\!] \Rightarrow t_1 \sim t_2$.

Question 9. *Donner une sémantique dénotationnelle au* ou-parallèle *(un opérateur booléen qui retourne même quand un de ses arguments diverge et l'autre converge). Est-il implémentable ?*



Question 10. *Montrez que notre sémantique n'est pas fully abstract.*

Construire des sémantiques fully abstract pas trop artificielles est une sorte de Graal pour les sémanticiens et dépasse un peu les ambitions de ce cours.

Somme, référence ...

Question 11. *Rajoutez un type somme au langage précédent : étendez les règles de calcul, le système de typage.*

Question 12. *Quel problème voyez vous pour étendre la sémantique ? Vous avez une solution ?*

Question 13. *Idem avec des références.*