TD 13

Mathilde Noual, Marc Lasson

24 mai 2011

Équivalence sémantique dénotationnelle – opérationnelle

1. Donner un ω-cpo sur lequel les programmes de **Imp** peuvent être interprétés.
2. Construire l'interprétation de **skip**, de la séquence (;), de l'affectation, de la conditionnelle.
3. Donner le code du *swap* de variable, construire son interprétation.
4. Donner l'interprétation du **while**.
5. Construire l'interprétation de **while** `true` **do skip**.
6. Construire l'interprétation de la fonction factorielle (programmée dans **IMP**).
7. Montrer que pour toute commande C, l'interprétation $[\![C]\!]$ est égale à $\{(\sigma, \sigma') | \langle C, \sigma \rangle \to \sigma'\}$.

Topologie de Scott

Soit $(A, \leq)$ un ω-cpo, et soit $\mathcal{O}$ l'ensemble des sous-ensembles $U \subseteq A$ qui sont clos supérieurement, et tel que si une chaîne a sa limite dans U, alors elle rencontre U.

1. Montrer que $\mathcal{O}$ est une topologie (contient A et l'ensemble vide, stable par union quelconque et intersection finie).
2. Montrer que les topologies de Scott discrètes correspondent aux domaines triviaux (où l'ordre est l'égalité).
3. Montrer que ces dernières sont les seules topologies de Scott qui sont des espaces de Hausdorf (on peut séparer tout couple de points par deux ouverts).
4. Caractériser les fermés de Scott.
5. Montrer que $\downarrow x = \{y \in A | y \leq x\}$ est un fermé.
6. Montrer qu'une fonction est continue au sens des CPO si et seulement si elle est continue au sens des topologies de Scott.

Les ω-cpos forment une Catégorie Cartésienne Close

On considère ici les ω-cpos avec élément minimal.

1. Montrer que la fonction Id_D sur un cpo D est une fonction continue et que la composée de deux fonctions continues est continue.
2. On note $[A \to B]$ l'ensemble des fonctions continues entre deux cpos A et B. Montrer qu'il est également ω-cpo.
3. On note $A \times B$ le produit cartésien entre deux ω-cpos, montrer qu'il est également un ω-cpo.
4. Prouvez que $f \in [A \times B \to C]$ est continue si et seulement si pour toute chaîne $x \in A^{\mathbb{N}}$, $y \in B^{\mathbb{N}}$ on ait :
$$f(\sup x, \sup y) = \sup f(x \times y).$$
5. Soit A un ω-cpo et Y la fonction qui a une fonction continue de $[A \to A]$ associe son plus petit point fixe. Prouvez que $Y \in [[A \to A] \to A]$.

6. Soit A, B, C trois ω-cpos. Construisez deux fonctions $\mathbf{Ev}_{A,B} \in [[A \to B] \times A \to B]$ et $\Lambda_{A,B,C} \in [[A \times B \to C] \to [A \to [B \to C]]$ qui correspondent à l'évaluation d'une fonction et à la curryfication. Il faut montrer qu'elles sont continues !

   Vos fonctions devront être suffisamment naturelles pour satisfaire les axiomes suivants.

$$\begin{array}{rcl} \Lambda_{A,B,C}(f) \circ g & = & \Lambda_{A',B,C}(f \circ < g \circ \pi_1, \pi_2 >) \\ \mathbf{Ev}_{B,C} \circ < \Lambda_{A,B,C}(f) \circ \pi_1, \pi_2 > & = & f \\ \Lambda_{[A \to B],A,B}(\mathbf{Ev}_{A,B}) & = & \mathrm{Id}_{[A \to B]} \end{array}$$

   où $f : A \times B \to C$ et $g : A' \to A$ et où pour toutes fonctions $h_1 : X \to Y_1$, $h_2 : X \to Y_2$ on définit $< h_1, h_2 >: X \to Y_1 \times Y_2$ par $x \mapsto (h_1(x), h_2(x))$.

   On vérifiera au passage que, dans chaque égalité, le membre droit et le membre gauche appartiennent au même ensemble de fonctions continues.