TD 12 - Points fixes

Rappels du TD 11

- □ Un ordre partiel a un minimum $\bot$ (resp. un maximum $\top$) ssi $\bigvee\emptyset = \bot$ (resp. $\bigwedge\emptyset = \top$) existe.
- □ Un ordre partiel est un **treillis borné** ssi toute partie finie (y compris $\emptyset$) a une borne supérieure et une borne inférieure.
- □ Un ordre partiel est un **treillis complet** ssi toute partie a une borne supérieure (et de façon equivalente, ssi toute partie a une borne inférieure).
- □ **Théorème de Knaster Tarski :** Soit $(E, \leq)$ un treillis complet et $f : E \to E$ une fonction monotone. Alors l'ensemble $P_f \neq \emptyset$ des points fixes de f forme un treillis complet. Son plus petit élément est la borne inférieure de l'ensemble des pré-points fixes de f et son plus grand est la borne supérieure de l'ensemble des post-points fixes de f.

Rappel des définitions

- ▷ Une **chaine** dans un ordre partiel est une partie <u>non vide</u>.
- ▷ Un ordre partiel est **complet** si toute chaine a une borne supérieure.
- ▷ Un ordre partiel est **pointé** s'il a un minimum (noté $\bot$).
- ▷ Un ordre partiel est un **ω-cpo** s'il est complet et pointé.
- ▷ Une fonction est **continue** si elle commute avec les sups des chaines.
- ▷ Une fonction f est **stricte** si $f(\bigvee\emptyset) = \bigvee\emptyset$.

Exercice 1.

Points fixes dans les ω-cpos

1. Soit $(E, \leq)$ un ω-cpo et $f : E \to E$ une fonction continue. Vérifier que pour tout $x \in E$, post-point fixe ($f(x) \geq x$) de f, l'ensemble $X = \{f^n(x) \mid n \in \mathbf{N}\}$ est une chaine de E. Que peut-on dire de $\bigvee X$?

2. Montrer que dans un ω-cpo, toute fonction continue a un point fixe et préciser quel est le plus petit.

Exercice 2.

1. Soit X un ensemble. Construire un ω-cpo $(X_\bot, \trianglelefteq)$ tel que : *(i)* $X \subseteq X_\bot$ et *(ii)* pour toute fonction partielle $f : X \to D$ vers un ordre partiel $(D, \leq)$, il existe une extension continue $h : X_\bot \to D$ de f. On note alors $f_\bot$ son unique extension continue stricte.

2. Soit D et E deux ω-cpos et soit $[D \to E]$ l'ensemble des fonctions continues entre D et E. Munir cet ensemble d'un ordre pour en faire un ω-cpo et préciser quelle est la borne supérieure d'une chaîne dans cet ω-cpo.

Soit Σ un ensemble et $I = [\Sigma_\bot \to \Sigma_\bot]$ l'ensemble des fonctions continues dans le ω-cpo $\Sigma_\bot$ (*cf* question 1.).

3. Rappeler quel est l'ordre sur I.

4. Pour toute fonction $f \in I$, on définit la fonctionnelle $\gamma[f] : I \to I$ par :

$$\forall x \in \Sigma_\bot,\ \gamma[f](g)(x) = \begin{cases} \bot & \text{si } f(x) = \bot \\ g \circ f(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $\gamma = \gamma[f]$ est *(i)* monotone et *(ii)* continue.

5. Soient $F : I \to I$ et $G : I \to I$ deux fonctions continues et soit $t : \Sigma_\perp \to \mathbb{B}_\perp$. On définit la fonction $\delta[F, G, t] : I \to I$ suivante :

$$\forall f \in I,\ \forall x \in \Sigma_\perp,\ \delta[F,G,t](f)(x) = \begin{cases} \perp & \text{si } t(x) = \perp \\ F(f)(x) & \text{si } t(x) = 1 \\ G(f)(x) & \text{si } t(x) = 0. \end{cases}$$

Montrer que $\delta = \delta[F, G, t]$ est continue.

Exercice 3.

1. Les fonctions de dénotation des expressions (arithmétiques et booléennes) de **IMP** , vues comme des fonctions à deux arguments ($\mathcal{A}[\![\cdot]\!] :$ **Aexp** $\to \Sigma \to \mathbb{N}$ et $\mathcal{B}[\![\cdot]\!] :$ **Aexp** $\to \Sigma \to \mathbb{B}$) sont a priori des fonctions partielles. Proposer une solution pour les rendre totales.

2. En faire de même pour les fonctions de dénotation des commandes ($\mathcal{C}[\![\cdot]\!] :$ **Com** $\to \Sigma \to \Sigma$)

3. Donner la fonction de dénotation d'une commande `while`.

4. Etendre la la fonctionnelle suivante pour en faire un fonction continue $\tau_\perp : (\mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp) \to (\mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp)$. Montrer que $\tau_\perp$ a un point fixe, préciser quel est le plus petit et en donner quelques *approximations*.

$$\tau(f) : \begin{cases} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x - 10 & \text{si } x > 100 \\ f^2(x + 11) & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$