TD 11 - Points fixes

Exercice 1. *McCarthy*

Soit c∈ **Com** la commande **IMP** suivante :

if `(101≤X)` **then** `(X:=X-10; B:=B-1;)` **else** `(X:=X+11; B:=B+1;)` .

Soit ω∈ **Com** la commande : **while** `(1≤B)` **do** `c` .

Soit σ :**Loc** →**N** un état tel que $\sigma(\mathtt{B}) = \mathtt{1}$ et $\sigma(\mathtt{X}) = \mathtt{n}$ et
soit σ' l'état (s'il existe) tel que $\langle \omega, \sigma\rangle \to \sigma'$.

1. Dans le cas où $n = 101$, donner la dérivation de $\langle \omega, \sigma\rangle \to \sigma'$ (et déterminer σ').

2. Donner, en fonction de n, la suite des états $(\sigma_i)_{i\leq m}$ définie par :

$$\sigma_0 = \sigma, \quad \sigma_m = \sigma', \quad \forall i < m,\ \sigma_i(B) > 0, \quad \text{et} \quad \forall i < m,\ \langle \mathtt{c}, \sigma_{\mathtt{i}}\rangle \to \sigma_{\mathtt{i+1}}$$

Soit $(E, \leq)$ et un ensemble partiellement ordonné (ou *ordre partiel* ou *poset*).

▷ Une fonction $f : E \to E$ est dite **monotone** si $\forall x, y \in E, x \leq y \ \Rightarrow\ f(x) \leq f(y)$.

▷ Un **point fixe** de f est un élement $a \in E$ tel que $f(a) = a$.

▷ Un **pré-point fixe** (resp. **post-point fixe**) d'une fonction $f : E \to E$ est un élément $x \in E$, tel que $f(x) \leq x$ (resp. $f(x) \geq x$).

▷ Pour une partie $X \subseteq E$, on note $\bigvee X$ (resp. $\bigwedge X$) la borne supérieure (resp. la borne inférieure) si elle existe. On note $a \vee b = \bigvee\{a, b\}$ (resp. $a \wedge b = \bigwedge\{a, b\}$).

▷ $(E, \leq)$ est un **treillis** si $\forall x, y \in E, \exists z, z' \in E, z = x \vee y$ et $z' = x \wedge y$.

▷ $(E, \leq)$ est un **treillis borné** si c'est un treillis qui possède un minimum et un maximum.

Exercice 2. *Knaster-Tarski*

1. On suppose que $\forall x, y \in E, \exists z \in E, z = x \vee y$. Pour une partie $X \subseteq E$ quelconque, que peut-on dire de $\bigvee X$?

2. Montrer qu'un ordre partiel $(E, \leq)$ est un treillis borné ssi tout partie finie de E a une borne supérieure et une borne inférieure.

3. Montrer que si toute partie d'un ordre partiel E a une borne supérieure alors toute partie de E a une borne inférieure.

▷ Un **treillis complet** est un treillis dont toute partie a une borne supérieure (et donc une borne inférieure par la question précédente).

On suppose que $(E, \leq)$ est un treillis complet. On note $\perp$ le minimum de E et $\top$ son maximum.
Soit $f : E \to E$ une fonction monotone et soit P_f l'ensemble des points fixes de f.

4. Montrer que la borne inférieure de l'ensemble X des pré-points fixes de f est le plus petit point fixe de f.

5. Vérifier que $P_f \neq \emptyset$ et montrer que $(P_f, \leq)$ est un treillis complet.

▷ Une **chaine** dans E est une partie $X \subseteq E$ totalement ordonnée pour la restriction de l'ordre $\leq$ $(\forall x, y \in E, x \leq y \vee y \leq x)$.

▷ $(E, \leq)$ est un **ordre partiel complet** si toute chaine X a une borne supérieure $\bigvee X$.

▷ $(E, \leq)$ est un ω**-cpo** si c'est un ordre partiel complet **pointé**, *i.e.*, avec un minimum $\perp_E$.

Soient $(D, \leq_D)$ et $(E, \leq_E)$ deux ω-cpo, et $f : D \to E$.

▷ f est **continue** si elle commute avec les sups : pour toute chaine X dans D, $f(\bigvee X) = \bigvee(f(X))$ (où $f(X) = \{f(x),\ x \in X\}$).

Exercice 3. *Points fixes dans les ω-cpos*

Dans un ω-cpo E :

1. Montrer que toute fonction continue est monotone.

2. Donner un exemple de fonction monotone mais pas continue.

3. Soit X un ensemble. Construire un ω-cpo $X_\perp$ contenant X et tel que pour toute fonction partielle $f : X \to D$ vers un ordre partiel D il existe une unique fonction continue $h : X_\perp \to D$ qui étend f.

Soit $f : E \to E$ une fonction continue.

4. Vérifier que pour tout $x \in E$, post-point fixe pour f, $X_x \equiv \{f^n(x) \mid n \in \mathbf{N}\}$ est une chaine de D. Que peut-on dire de $\bigvee X_x$?

5. En déduire que f admet un plus petit point fixe.

Exercice 4.

1. Soit D et E deux ω-cpos. Montrer que l'ensemble $[D \to E]$ des fonctions continues entre D et E est un ω-cpo.

Soit la fonctionnelle $\tau : (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to (\mathbb{N} \to \mathbb{N})$ telle que $\forall f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\tau(f) : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x - 10 & \text{si } x > 100 \\ f^2(x+11) & \text{sinon.} \end{cases} \end{array} \right.$$

Considérons les extensions continues des fonctions sur $\mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp$ (*cf* question 3, Exercice 3).

2. Vérifier que τ est continue sur $\mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp$.

3. En déduire que τ a un plus petit point fixe.