TD 1

1 Système de déduction

Exercice 1.
Comme dans le cours, dans ce td et les suivants le système de déduction qu'on choisit d'utiliser est la déduction naturelle classique. Dans ce système,

- Donner les preuves formelles de commutativité, d'associativité et de distributivité de $\wedge$, $\vee$, $\exists$, $\forall$ (lorsque ces preuves existent) ;
- Prouver les lois de Morgan : $\neg p \vee \neg q \leftrightarrow \neg(p \wedge q)$, $\neg p \wedge \neg q \leftrightarrow \neg(p \vee q)$;
- Prouver l'équivalence des 3 formules suivantes :
  - *Reductio Ad Absurdum :* $\neg\neg p \to p$;
  - *Tertium Non Datur :* $p \vee \neg p$;
  - *Loi de Pierce :* $((p \to q) \to p) \to p$.

2 L'arithmétique de Peano

On rappelle les axiomes de l'arithmétique de Peano (PA) :

Axiomes d'égalité
1. $\forall x\ (x = x)$
2. $\forall x\ \forall y\ \forall z\ (x = y \wedge x = z \Rightarrow y = z)$
3. $\forall x\ \forall x'\ (x = x' \Rightarrow s(x) = s(x'))$
4. $\forall x\ \forall x'\ \forall y\ (x = x' \Rightarrow x + y = x' + y)$
5. $\forall x\ \forall y\ \forall y'\ (y = y' \Rightarrow x + y = x + y')$
6. $\forall x\ \forall x'\ \forall y\ (x = x' \Rightarrow x \times y = x' \times y)$
7. $\forall x\ \forall y\ \forall y'\ (y = y' \Rightarrow x \times y = x \times y')$

Axiomes de calcul

8. $\forall y\ (0 + y = y)$
9. $\forall x\ \forall y\ (s(x) + y = s(x + y))$
10. $\forall y\ (0 \times y = 0)$
11. $\forall x\ \forall y\ (s(x) \times y = (x \times y) + y)$

Axiomes de Peano

12. $\forall x\ \forall y\ (s(x) = s(y) \Rightarrow x = y)$
13. $\forall x\ \neg(s(x) = 0)$
14. $\forall x_1 \cdots \forall x_n\ (A\{x := 0\}\ \wedge\ \forall x\ (A \Rightarrow A\{x := s(x)\})\ \Rightarrow\ \forall x\, A)$
    pour toute formule A telle que $FV(A) \subseteq \{x_1; \ldots; x_n; x\}$

Exercice 2. *Principe de Leibniz*

Montrer que pour tout terme t et pour toute formule A de l'arithmétique :

1. PA $\vdash \quad x = y \ \Rightarrow\ t\{z := x\} = t\{z := y\}$
2. PA $\vdash \quad x = y \ \Rightarrow\ (A\{z := x\} \Leftrightarrow A\{z := y\})$

(On écrira les cas-clé de chacune des deux inductions.)

Exercice 3. *Ordre sur les entiers*

Dans l'arithmétique de Peano, on définit l'ordre sur les entiers naturels par $x \leq y \equiv \exists z\,(x + z = y)$, et on note $x < y \equiv s(x) \leq y$.
Montrer dans PA que :

1. $x \leq y$ est réflexive, transitive et antisymétrique (ordre).
2. $x < y$ est irréflexive et transitive (ordre strict).

On s'attachera surtout à préciser les étapes de raisonnement (sans entrer dans les détails techniques de la dérivation). On donnera les lemmes intermédiaires utilisés, ainsi que la technique de preuve correspondante.

Exercice 4. *Induction forte et bon ordre*

Soit $A(x)$ une formule dépendant d'une variable libre x. Montrer que dans PA, les formules suivantes sont prouvables :

1. $\forall x\,(\forall y\,(y < x \Rightarrow A(y)) \Rightarrow A(x)) \ \Rightarrow\ \forall x\, A(x)$
2. $\exists x\, A(x) \ \Rightarrow\ \exists x_0\ (A(x_0)\ \wedge\ \forall x\ (A(x) \Rightarrow x_0 \leq x))$

Exercice 5. *Le théorème d'Euclide*

Démontrer dans PA le théorème d'Euclide :

$$\forall x\ \exists y\ (x \leq y \wedge \mathrm{prime}(y))\,.$$

où $\mathrm{prime}(x)\ \equiv\ x \neq 1\ \wedge\ \forall y \forall z\,(x = y \times z \Rightarrow y = 1 \vee z = 1)$.
Expliquer en détail la méthode et les résultats intermédiaires utilisés.

Exercice 6. *La fonction puissance (***)*

Construire *dans le langage de l'arithmétique* (i.e. 0, s, $+$, $\times$) une formule $P(x, y, z)$ à trois variables libres x, y, z telle que :

1. PA $\vdash\ \forall x\ \forall z\ (P(x, 0, z) \Leftrightarrow z = 1)$
2. PA $\vdash\ \forall x\ \forall y\ \forall z\ (P(x, y, z)\ \Rightarrow\ \forall z'\ (P(x, s(y), z') \Leftrightarrow z' = z \times x))$

(Intuitivement : $P(x, y, z) \equiv x^y = z$.)