Typechecking is Syntactic

- Suppose

$$\mathsf{false} = \emptyset$$

$$\mathbb{N} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ \ldots\ \}$$

  then $\mathsf{false} \in \mathbb{N}$ because $\mathsf{false} = |0|$

- Want typechecking to reject $\mathsf{false} \ \oplus \ |3|$
  - $x \oplus y = |{+}| \diamond \langle x, y \rangle$
  - $|{+}| \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \twoheadrightarrow \mathbb{N}$
  - theorem proving reduces $\mathsf{false} \ \oplus \ |3| \in \mathbb{N}$ to
    * $\mathsf{false} \in \mathbb{N}$
    * $|3| \in \mathbb{N}$
  - typechecker should reject $\mathsf{false} \in \mathbb{N}$
    * even though it is true!
    * in fact $\mathsf{false} \ \oplus \ |3| \ = \ |3|$