Emil-von-Behring Gymnasium

Kollegstufenjahrgang 1988/90

Facharbeit der Mathematik

Die Fibonacci-Zahlen

von

Markus Kuhn

Leistungskurs:	M20
Kursleiter:	OStR Ekkehard Köhler
Abgabetermin:	01.02.1990

Erzielte Note: ____________ in Worten: ______________________________

Erzielte Punkte: ____________ in Worten: ______________________________
(einfache Wertung)

Abgabe beim Kollegstufenbetreuer am: ____________________

____

(Unterschrift des Kursleiters)

Die Fibonacci-Zahlen

Markus Kuhn

Einführung

Der Italiener Leonardo Pisano — er nannte sich *Filius Bonaccii* (lat. Sohn des Bonaccio), weshalb er heute als Leonardo Fibonacci bekannt ist — war wohl der größte europäische Mathematiker vor der Renaissance. Er faßte fast vollständig das Wissen über Arithmetik und Algebra dieser Zeit 1202 in seinem Buch *Liber abaci* (lat. Buch über den Abakus) zusammen, das heute nur noch in der neueren Version von 1228 erhalten ist. Durch diese Arbeit wurden in Westeuropa die noch heute verwendeten arabischen Ziffern bekannt, weshalb sie wichtig für die Entwicklung der Mathematik in den folgenden Jahrhunderten wurde. [1, S. 1f; 3, S. 78f]

Auf den Seiten 123–124 des *Liber abaci* erscheint folgende Übungsaufgabe zur Addition (Da mir leider nur die englische Übersetzung einer russischen Übersetzung des lateinischen Originals vorliegt, gebe ich die Aufgabe hier nur sinngemäß wieder):

> Ein neugeborenes Hasenpaar wird in einen umzäunten Garten gesetzt. Jedes Hasenpaar erzeugt während seines Lebens jeden Monat ein weiteres Paar. Ein neugeborenes Paar wird nach einem Monat fruchtbar und bekommt somit nach zwei Monaten seine ersten Nachkommen. Es soll angenommen werden, daß die Hasen nie sterben. Wieviele Hasenpaare sind nach einem Jahr in diesem Garten?

Zu Beginn des ersten Monats ist ein Paar im Garten. Da dieses Paar erst zu Beginn des zweiten Monats fruchtbar wird, erhöht sich die Zahl der Paare erst im dritten Monat auf zwei. Im vierten Monat sind es erst drei Paare, da das im dritten geborene gerade fruchtbar geworden ist. Da es nun zwei fruchtbare Paare gibt (alle Paare, die schon im dritten Monat am Leben waren sind jetzt fruchtbar) und bis jetzt insgesamt drei Paare den Garten bevölkern, sind es im fünften Monat nun fünf Paare.

Es sei F_n die Anzahl der Hasenpaare, die sich zu Beginn des Monats n im Garten befinden. Dies ist im Monat eins genau ein Paar, davor waren es null Paare:

$$F_0 = 0 \tag{1}$$

$$F_1 = 1 \tag{2}$$

Die Zahl der Paare F_n im Monat n ist die Summe aus der Hasenpopulation des Vormonats F_{n-1} und der neugeborenen Paare. Da zwei Monate bis zur ersten Geburt vergehen, müssen alle Eltern dieser Neugeborenen bereits im Monat $n-2$ am Leben gewesen sein. Es gibt also F_{n-2} neue Paare. Somit ergibt sich

$$\boxed{F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad \text{für } n \geq 2} \tag{3a}$$

und wir haben das Hasenproblem auf eine rekursiv definierte Folge $\langle F_n \rangle$ reduziert. Gleichung (3a) läßt sich nach einer Substitution von n durch $n+1$ oder $n+2$ auch als

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \qquad \text{für } n \geq 1 \tag{3b}$$

oder

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \qquad \text{für } n \geq 0 \tag{3c}$$

formulieren. Die Lösung des obigen Problems ist $F_{13} = 233$, da mit Beginn des 13. Monats genau ein Jahr verstrichen ist. In älterer Literatur wird statt F_n oft auch die Bezeichnung u_n verwendet.

Die ersten Elemente dieser Folge, der der Mathematiker E. Lucas den Namen „Fibonacci-Zahlen“ gab, lauten:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	$\cdots$
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	$\cdots$

Eine der faszinierendsten Eigenarten der Fibonacci-Zahlen ist, daß sie in den verschiedensten Bereichen der Mathematik auftreten: sie haben eine enge Beziehung zum *Goldenen Schnitt*, ohne sie wären wichtige Beweise über Eigenschaften von Kettenbrüchen kaum möglich und die Laufzeitabhängigkeit mancher Algorithmen (z.B. der Euklidsche Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier Zahlen) läßt sich durch ihren Einsatz ermitteln. Auch in der Physik und in anderen Bereichen der Naturwissenschaften tauchen sie auf. Im folgenden Kapitel werde ich hierzu einige Beispiele geben. Manche Börsenkenner behaupten gar, daß sich Wirtschaftszyklen durch Fibonacci-Zahlen beschreiben lassen.

Die Fibonacci-Zahlen üben schon lange einen besonderen Reiz auf Mathematiker aus. So haben viele bedeutende Forscher wie etwa Gauss, Euler, Dirichlet, Lagrange und Kronecker sich mit ihnen befaßt [4, S. 393ff]. Seit 1963 erscheint sogar vierteljährlich die Zeitschrift *The Fibonacci Quaterly*, die sich mit den Fibonacci-Zahlen und verwandten Themen befaßt.

Im Schulunterricht ist die Fibonacci-Folge hervorragend als Anwendungsbeispiel der Induktionsbeweistechnik geeignet. Nicht nur der allgemein übliche Induktionsschritt $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ sondern auch seltenere Formen wie $P(n) \wedge P(n+1) \Rightarrow P(n+2)$ oder $P(n) \Rightarrow P(n+m)$ tauchen in vielen Beweisen für Sätze über die Fibonacci-Zahlen auf. Einige Beispiele finden sich in den folgenden Kapiteln.

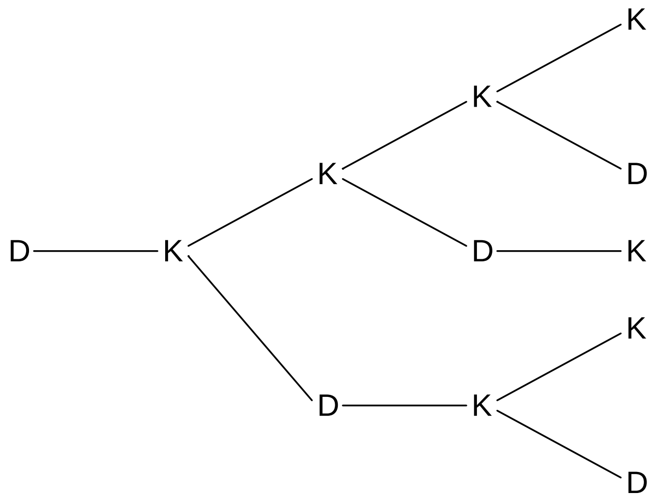
Fibonacci-Zahlen in der Natur

Die Honigbiene (*apis mellifica*) unterscheidet sich von vielen anderen Tierarten durch ihr komplizierteres Fortpflanzungssystem. Es existieren drei Bienengeschlechter: die Königin, die Arbeiterin und die Drohne. Nur die Königin ist in der Lage Eier zu legen. Wenn ein Ei von einer Drohne befruchtet wurde, so entwickelt sich daraus abhängig von der ihm zukommenden Pflege eine Arbeiterin oder eine Königin. Aus einem unbefruchteten Ei entspringt wieder eine Drohne. [2; 5]

Damit lassen sich die Vorfahren einer Drohne mit den folgenden beiden Regeln aufzählen:

- Eine Drohne hat immer eine Königin als direkten Vorfahren.
- Eine Königin hat immer eine Königin und eine Drohne als direkten Vorfahren.

Es ergibt sich für eine Drohne also folgender Stammbaum:



Bei einem normalen Stammbaum, in dem jedes Individuum durch heterosexuelle Zeugung entsteht, wächst die Anzahl der Vorfahren einer Generationsebene exponentiell mit der Generation. Das heißt beispielsweise, daß ein Mensch genau 2^1 Eltern, 2^2 Großeltern, 2^3 Urgroßeltern und 2^{n+2} $(\text{Ur})^n$großeltern hat. Wenn $I(n)$ die Anzahl der Individuen auf der n-ten Ebene des Stammbaums ist, so gilt beim Menschen

$$I_{\text{Mensch}}(n) = 2^{n-1},$$

wobei in der 1. Ebene sich das Individuum befindet, dessen Stammbaum betrachtet wird.

Die obige Abbildung läßt bereits erkennen, daß sich beim Stammbaum einer Drohne $I(n)$ nicht exponentiell entwickelt. Betrachten wir hierzu die Anzahl der Königinnen k_n und Drohnen d_n auf der n-ten Ebene des Stammbaums. Jede Königin der Ebene n erzeugt einen Nachfahren in der Ebene $n-1$, daher gilt $k_n = k_{n-1} + d_{n-1}$. Ferner hat jede Drohne des Stammbaums eine Königin als Nachkommen: $d_n = k_{n-1}$. Mit diesen Regeln kann folgender Zusammenhang hergeleitet werden:

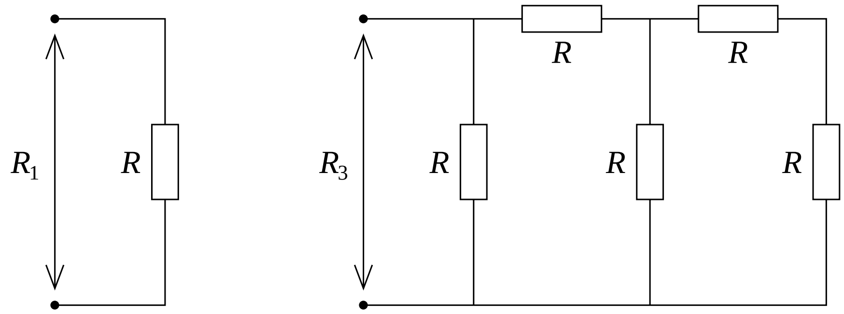
$$\begin{aligned} I(n) &= k_n + d_n = \\ &= k_{n-1} + d_{n-1} + k_{n-1} = \\ &= I(n-1) + k_{n-2} + d_{n-2} = \\ &= I(n-1) + I(n-2) \end{aligned}$$

Da gemäß der Abbildung $I(1) = 1$ und $I(2) = 1$ ist wegen Gleichung (1) bis (3a)

$$I_{\text{Drohne}}(n) = F_n.$$

Der Stammbaum einer Drohne wächst also nicht exponentiell, sondern gemäß der Fibonacci-Folge, was jedoch wie wir später noch sehen werden, für große n immer weniger Unterschied macht.

Wir wollen nun ein Beispiel aus der Physik betrachten, bei dem wieder die Fibonacci-Zahlen auftreten [5]. Eine Widerstandsleiter 1. Ordnung bestehe nur aus einem Widerstand R. Eine Widerstandsleiter $(n+1)$-ter Ordnung erhält man, indem man einen Widerstand R mit einer Leiter n-ter Ordnug in Serie und dann einen Widerstand R mit allem parallel schaltet. Eine Leiter n-ter Ordnung besteht also aus $2n-1$ Widerständen. Ihren Gesamtwiderstand bezeichnen wir mir R_n. Die Abbildung zeigt einige Beispiele:



Wir wollen nun R_n ermitteln und betrachten hierzu den Fall $R = R_1 = 1$ (da es hier nur um den mathematischen Zusammenhang geht, lassen wir die Einheit weg). Es gilt aufgrund der obigen Induktionsregel zum Aufbau einer Widerstandsleiter

$$R_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+R_n}}.$$

Für $R_n = \frac{a_n}{b_n}$ folgt also

$$R_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{a_n}{b_n}}} = \frac{a_n + b_n}{a_n + 2b_n}.$$

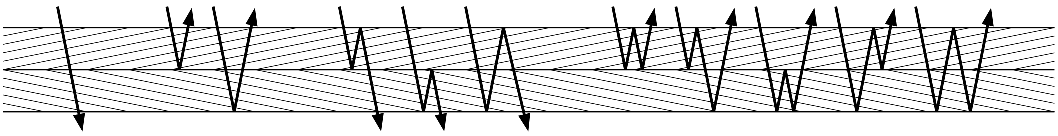
Wir nehmen (nachdem wir mit dieser Formel einige Beispielwerte ermittelt haben) an, daß $R_n = \frac{F_{2n-1}}{F_{2n}}$. Beweis durch vollständige Induktion: (I) Induktionsanfang $R_1 =$

$1 = \frac{1}{1} = \frac{F_1}{F_2}$ und (II) der Induktionsschritt:

$$R_{n+1} = \frac{F_{2n-1} + F_{2n}}{F_{2n-1} + 2F_{2n}} = \frac{F_{2n+1}}{F_{2n+1} + F_{2n}} =$$
$$= \frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}} = \frac{F_{2(n+1)-1}}{F_{2(n+1)}} \qquad q.e.d.$$

Da sich ein Widerstandswert sowohl bei der Parallel- als auch bei der Seriellschaltung ausklammern läßt gilt allgemein $R_n = R\frac{F_{2n-1}}{F_{2n}}$.

Auch unser letztes Beispiel kommt aus der Physik [2; 5]. Auf drei halbdurchlässige Spiegel wird ein Lichtstrahl gelenkt.



Wieviele verschiedene Wege a_n kann ein Photon durch die Anordnung nehmen, wenn es insgesamt n-mal reflektiert wird? Die einmalige Reflexion am obersten Spiegel ohne in die Anordnung einzudringen soll hier nicht mitgezählt werden. Der Zeichnung entnehmen wir $a_0 = 1$ und $a_1 = 2$. Für alle $n \geq 2$ besteht für das Photon einerseits die Möglichkeit den mittleren Spiegel zu durchdringen und am untersten reflektiert zu werden. Damit hat es wieder die Lage eines eben hereingekommenen Photons und für seine weiteren $n-1$ Reflexionen hat es a_{n-1} Möglichkeiten zur Auswahl. Oder es wird gleich am mittleren und dann am oberen Spiegel reflektiert und hat dann noch $n-2$ Ablenkungen und damit a_{n-2} Möglichkeiten vor sich. Es gilt also $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Es handelt sich bei der Lösung dieses Problems also nur um eine verschobene Fibonacci-Folge: $a_n = F_{n+2}$.

Einige Eigenschaften der Fibonacci-Folge

Eine der ersten Untersuchungen, die man mit einer Zahlenfolge anstellen kann, ist Summen der Folge zu betrachten. Die Herleitungstechnik, die wir dabei im folgenden anwenden, basiert auf folgender Idee: Wir schreiben für jedes Glied der Summe eine Gleichung, in der das Glied durch Nachbarglieder ausgedrückt wird. Dann bilden wir die Summe all dieser Gleichungen. Auf der einen Seite steht nun die gewünschte Summe, während auf der anderen Seite sich mit etwas Glück die meisten Nachbarglieder so aufheben, daß ein einfacher Term übrigbleibt [1, S. 5ff].

Nun wollen wir diese Technik auf die Summe der ersten n Fibonacci-Zahlen anwenden. (Als „erste Fibonacci-Zahl“ soll hier immer F_1 zählen.) Die Gleichungen für die einzelnen Glieder lauten:

$$\begin{aligned}
F_1 &= F_3 - F_2 \quad (\text{da } F_3 = F_1 + F_2) \\
F_2 &= F_4 - F_3 \\
F_3 &= F_5 - F_4 \\
&\cdots\cdots \\
F_{n-1} &= F_{n+1} - F_n \\
F_n &= F_{n+2} - F_{n+1}
\end{aligned}$$

Da auf der rechten Seite die meisten Glieder einmal positiv und einmal negativ auftauchen, hebt sich fast alles auf und wir erhalten

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = -F_2 + F_{n+2}$$

und das ergibt mit $F_2 = 1$

$$\sum_{\nu=1}^{n} F_\nu = F_{n+2} - 1.$$

Mit der gleichen Technik erhalten wir auch die Summe der ersten n ungeraden Fibonacci-Zahlen:

$$\begin{aligned}
F_1 &= F_2 \\
F_3 &= F_4 - F_2 \\
&\cdots\cdots\cdots \\
F_{2n-1} &= F_{2n} - F_{2n-2}
\end{aligned}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} F_{2\nu-1} = F_{2n}.$$

Die folgenden Summen können ebenso hergeleitet werden, so daß ich hier nur noch kurz die Ergebnisse zusammenstelle:

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=1}^{n} F_{2\nu} &= F_{2n+1} - 1 \\
\sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu+1} F_\nu &= (-1)^{n+1} F_{n-1} + 1 \\
\sum_{\nu=1}^{n} F_\nu^2 &= F_n F_{n+1}.
\end{aligned}$$

Da die Fibonacci-Zahlen rekursiv definiert sind, bietet sich bei Beweisen mit ihnen natürlich oft auch ein rekursives Beweisverfahren an: die vollständige Induktion. Mit ihr soll der folgende Satz bewiesen werden, den wir später noch für die Herleitung der Teilbarkeitsregeln benötigen werden [1, S. 7f; 2]:

$$\boxed{F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}, \quad \text{für alle } m, n \geq 1.} \tag{4}$$

Wir werden nun einen Induktionsbeweis für alle m durchführen. Für $m = 1$ gilt

$$F_{n+1} = F_{n-1}F_1 + F_nF_2 = F_{n-1} + F_n,$$

was ja Gleichung (3b) entspricht. Ebenso gilt (4) auch für $m = 2$, da auch

$$F_{n+2} = F_{n-1}F_2 + F_nF_3 = F_{n-1} + 2F_n = F_{n+1} + F_n$$

gültig ist. Beim Induktionsschritt zeigen wir nun unter der Annahme, daß der Satz für $m = k$ und $m = k + 1$ gilt, daß er auch für $m = k + 2$ gilt. Es gelten also die Gleichungen

$$F_{n+k} = F_{n-1}F_k + F_nF_{k+1}$$

und

$$F_{n+k+1} = F_{n-1}F_{k+1} + F_nF_{k+2}.$$

Addieren wir beide, so erhalten wir

$$F_{n+k+2} = F_{n-1}F_{k+2} + F_nF_{k+3},$$

was ja zu beweisen war.

Einer der ältesten Sätze über die Fibonacci-Zahlen ist

$$\boxed{F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n, \quad \text{für alle } n \geq 1.} \tag{5}$$

Er wurde bereits 1680 von dem französischen Mathematiker Cassini entdeckt und läßt sich ebenfalls leicht per Induktion beweisen [1, S. 8f; 2]. Er gilt für $n = 1$, da $F_2F_0 - F_1^2 = 0 - 1 = (-1)^1$. Unter der Annahme, daß (5) für n gilt, erhalten wir durch Substitution von F_{n-1} durch $F_{n+1} - F_n$ gemäß (3b) die Gleichung

$$F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2 = (-1)^n$$

oder umgeformt auch

$$F_{n+1}^2 - F_n(F_{n+1} + F_n) = (-1)^n$$

was schließlich nach multiplizieren mit -1 die zu beweisende Gültigkeit für $n + 1$

$$F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$$

ergibt. *Quod erat demonstrandum.*

Die Formel von Binet

Wir haben uns bislang damit begnügt, die Fibonacci-Zahlen rekursiv zu ermitteln. Nun wollen wir einen Term finden, mit dessen Hilfe wir eine beliebige Fibonacci-Zahl nur anhand ihres Indexes berechnen können. Die folgende Herleitung findet sich in veränderter Form in [1, S. 12–15].

Dazu betrachten wir zunächst einmal allgemein Zahlenfolgen, die die Gleichung

$$V_n = V_{n-1} + V_{n-2} \tag{6}$$

erfüllen, zu denen ja auch die Fibonacci-Folge gehört (siehe Gleichung (3a)). Jede der Zahlenfolgen $\langle V_n \rangle$, die die Gleichung (6) erfüllt ist eindeutig durch V_0 und V_1 bestimmt, da sich mit diesen Werten induktiv alle anderen ermitteln lassen. Ein möglicher Kandidat für eine solche Folge wäre die geometrische Folge

$$1, q, q^2, q^3, q^4, \ldots$$

Diese Folge erfüllt unter der Bedingung

$$q^n = q^{n-1} + q^{n-2} \qquad \text{für alle } n$$

Gleichung (6). Dividiert man diese Voraussetzung durch q^{n-2} so erhält man als vereinfachte Bedingung die quadratische Gleichung

$$q^2 = q + 1$$

mit den beiden Lösungen

$$\phi = q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad \hat{\phi} = q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Das Verhältnis $\phi = 1{,}618$ zweier Strecken wird übrigens *Goldener Schnitt* genannt, da Betrachter dieses Streckenverhältnis als besonders ästhetisch empfinden und es daher oft in der bildenden Kunst und in der Typographie (auch im Layout dieser Arbeit) angewandt wird. Die beiden Folgen

$$V_n' = \phi^n \quad \text{und} \quad V_n'' = \hat{\phi}^n$$

erfüllen also Gleichung (6) und damit auch

$$V_n' = V_{n-1}' + V_{n-2}' \quad \text{und} \quad V_n'' = V_{n-1}'' + V_{n-2}''.$$

Multiplizieren wir diese beiden Gleichungen mit beliebigen Faktoren c_1 bzw. c_2 und addieren sie, so erhalten wir

$$c_1 V_n' + c_2 V_n'' = (c_1 V_{n-1}' + c_2 V_{n-1}'') + (c_1 V_{n-2}' + c_2 V_{n-2}'')$$

womit gezeigt ist, daß auch die Folge

$$V_n = c_1 V_n' + c_2 V_n'' = c_1 \phi^n + c_2 \hat{\phi}^n$$

Gleichung (6) erfüllt. Wir können jetzt c_1 und c_2 so bestimmen, daß sich $V_n = F_n$ ergibt. Dazu lösen wir das Gleichungssystem $V_0 = F_0$ und $V_1 = F_1$ oder ausgeschrieben

$$c_1 + c_2 = 0$$
$$\text{und} \qquad c_1 \phi + c_2 \hat{\phi} = 1$$

und erhalten die Lösung

$$c_1 = \frac{1}{\phi - \hat{\phi}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Damit ergibt sich

$$V_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\phi^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\,\hat{\phi}^n = \frac{\phi^n - \hat{\phi}^n}{\sqrt{5}}$$

und wir haben einen Term zur Berechnung von F_n gefunden:

$$\boxed{F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^n - \hat{\phi}^n}{\sqrt{5}}.}$$

Diese Formel wurde 1843 von Jacques Binet veröffentlicht.

Die Binet-Formel läßt sich leicht umformen in

$$F_n = \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} - \frac{\hat{\phi}^n}{\sqrt{5}}.$$

Da $\hat{\phi} = -0{,}618$ gilt $|\hat{\phi}|^n \leq 1$ für alle $n \geq 0$ und somit ist der zweite Term in der obigen Darstellung stets im Bereich

$$-\frac{1}{2} < \frac{\hat{\phi}^n}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2},$$

da $\sqrt{5} > 2$. Daraus folgt für den ersten Term

$$\left| F_n - \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} \right| < \frac{1}{2}$$

oder anders ausgedrückt

$$F_n = \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} \text{ zur nächsten ganzen Zahl gerundet.}$$

Damit haben wir die Fibonacci-Folge durch eine geometrische Folge angenähert [1, S. 17f; 2]. Dies ermöglicht es, sehr einfach die Werte großer Fibonacci-Zahlen abzuschätzen. Der dabei gemachte Fehler nimmt mit zunehmendem n sogar ab, da

$\lim_{n\to\infty} \hat{\phi}^n = 0$. Es gilt also

$$\lim_{n\to\infty} \left(F_n - \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} \right) = 0.$$

Auch der Grenzwert für den Quotienten zweier aufeinanderfolgender F_n läßt sich nun leicht ermitteln:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\phi^{n+1}}{\sqrt{5}}}{\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}} = \phi.$$

Bei dem Beispiel „Widerstandsleiter" aus dem zweiten Kapitel läßt sich diese Erkenntnis gleich anwenden: Eine Leiter mit sehr vielen Widerständen hat den Gesamtwiderstand $R_\infty = R/\phi$.

Teilbarkeitsregeln für Fibonacci-Zahlen

Zu den elementarsten Ergebnissen der Zahlentheorie gehören Regeln, mit denen die Teilbarkeit von ganzen Zahlen festgestellt werden kann. Wir wollen daher auch die Teilbarkeit von F_n untersuchen. [1, S. 22–24]

Da das Thema Teilbarkeit im Unterricht nur in der Unterstufe kurz behandelt wird, seien hier noch einmal einige Grundlagen zusammengefaßt: Die Schreibweise $a|b$ für $a, b \in \mathbb{N}$ bedeutet „a teilt b", d.h. es existiert ein $c \in \mathbb{N}$, so daß $ac = b$. Es gilt $a|b \land a|c \Rightarrow a|(b + c)$. Den „größten gemeinsamen Teiler von a und b" bezeichnen wir als $\text{ggT}(a, b)$.

Setzen wir in Gleichung (4)

$$F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}, \quad \text{für alle } m, n \geq 1$$

für $m = kn$, so erhalten wir

$$F_{(k+1)n} = F_{n-1}F_{kn} + F_nF_{kn+1}.$$

Daraus folgt, daß falls $F_n|F_{kn}$ auch $F_n|F_{(k+1)n}$. Da bei $k = 1$ die Gleichung wegen $F_n|F_{1n}$ gilt, folgt per Induktion

$$\boxed{F_n|F_{kn}, \quad \text{für } n, k \geq 1.}$$

Ein weiterer interessanter Satz über die Teilbarkeit der Fibonacci-Zahlen ist

$$\boxed{m|n \Rightarrow F_m|F_n, \quad \text{für alle } m, n \geq 1.}$$

Wir beweisen diesen Satz für alle Vielfachen von m, also für alle $n = km$ mit $k \in \mathbb{N}$. Es ist offensichtlich, daß er für $n = m$ gilt, da $F_n|F_n$. Angenommen, der Satz gilt für n, so muß er auch für $n + m$ gelten (Induktionsschritt), d.h. es muß $F_n|F_{m+n}$ gelten.

Dies ist erfüllt, da laut (4)

$$F_{m+n} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$$

und da im Induktionsschritt $F_m|F_n$ angenommen wird. *Quod erat demonstrandum.*

Mit einem Widerspruchsbeweis läßt sich zeigen, daß zwei aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen teilerfremd sind, also daß

$$\boxed{\mathrm{ggT}(F_n, F_{n+1}) = 1, \quad n \geq 1.}$$

Angenommen, es gäbe ein $d = \mathrm{ggT}(F_n, F_{n+1}) > 1$, so würde wegen $F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$ auch $d|F_{n-1}$ und wegen $F_{n-2} = F_n - F_{n-1}$ auch $d|F_{n-2}$ gelten. Fährt man nach diesem Schema fort, so folgt auch $d|F_{n-3}, d|F_{n-4}, \ldots, d|F_1$. Da aber $F_1 = 1$ ist letzteres für $d > 1$ nicht möglich. Folglich ist die Annahme falsch und der Satz damit richtig.

Ein weiterer interessanter Satz in diesem Bereich ist

$$\boxed{\mathrm{ggT}(F_m, F_n) = F_{\mathrm{ggT}(m,n)}}$$

dessen Beweis ich hier jedoch seines Umfangs wegen nicht ausführe (siehe [1, S. 23]).

Das Fibonacci-Zahlensystem

Wir stellen die natürlichen Zahlen normalerweise mit Hilfe des Dezimalsystems dar. Dabei wird jede Ziffer der Zahlendarstellung mit der Wertigkeit ihrer Stellung multipliziert. Im Dezimalsystem verwendet man dabei $\ldots, 10^3, 10^2, 10, 1$ bzw. im Binärsystem $\ldots, 2^3, 2^2, 2, 1$ als Stellenwertigkeiten. Man erhält eine eindeutige Darstellung, wenn als höchste Ziffer der um eins erniedrigte Quotient zweier benachbarter Stellenwertigkeiten erlaubt ist.

Der Mathematiker ZECKENDORF konnte zeigen, daß auch mit den Fibonacci-Zahlen, d.h. mit den Stellenwertigkeiten $\ldots, F_4, F_3, F_2$ eine eindeutige Darstellung der natürlichen Zahlen möglich ist [2]:

$$n = \sum_{k \geq 1} z_k F_{k+1}, \qquad \text{wobei } z_k \in \{0, 1\} \text{ und } z_k + z_{k+1} < 2 \text{ für alle } k \geq 1.$$

Eine Zahl wird im Fibonacci-Zahlensystem also wie im Binärsystem als Folge aus Nullen und Einsen dargestellt, jedoch folgen niemals zwei Einsen aufeinander. Die Zahl 42 hat beispielsweise die Darstellung

$$42 = 34 + 8 = F_9 + F_6 = 10010000_F.$$

Die Fibonacci-Zahlen, aus denen n sich zusammensetzt, können mit einem einfachen Algorithmus gefunden werden: Suche die größte Fibonacci-Zahl $F_{k_1+1} \leq n$, dann suche $F_{k_2+1} \leq n - F_{k_1+1}$, dann $F_{k_3+1} \leq n - F_{k_1+1} - F_{k_2+1}$ usw. bis eine Fibonacci-Zahl ≤ 0 gesucht wird. Von hinten herein gezählt werden die Ziffern $k_1, k_2, k_3, \ldots$ auf Eins gesetzt, die übrigen auf Null und schon hat man die gewünschte Darstellung. Man sucht bei jedem Schritt eine Fibonacci-Zahl F_{k_m+1}, für die $F_{k_m+1} \leq n - a < F_{k_m+2}$ gilt, wobei $a = \sum_{i=1}^{m-1} F_{k_i+1}$ die Summe der bisher gefundenen Fibonacci-Zahlen ist. Subtrahiert man von dieser Ungleichung F_{k_m+1} so erhält man

$$0 \leq n - a - F_{k_m+1} < F_{k_m+2} - F_{k_m+1} = F_{k_m}.$$

Da aber für die nächste gesuchte Fibonacci-Zahl $F_{k_{m+1}+1}$ die Ungleichung $F_{k_{m+1}+1} \leq n - a - F_{k_m+1} < F_{k_{m+1}+2}$ gilt, kommt für k_{m+1} nicht $k_m - 1$ infrage, da $F_{(k_m-1)+1} > n - a - F_{k_m+1}$. Es können also in einer Darstellung im Fibonacci-Zahlensystem nie zwei Einsen aufeinander folgen. Die ersten 15 Zahlen lauten im Fibonacci-System:

$1 = 000001_F$	$6 = 001001_F$	$11 = 010100_F$
$2 = 000010_F$	$7 = 001010_F$	$12 = 010101_F$
$3 = 000100_F$	$8 = 010000_F$	$13 = 100000_F$
$4 = 000101_F$	$9 = 010001_F$	$14 = 100001_F$
$5 = 001000_F$	$10 = 010010_F$	$15 = 100010_F$

Um eine Zahl in Fibonacci-Schreibweise um eins zu erhöhen, geht man folgendermaßen vor. Endet die Zahl mit 0, so setzt man die letzte Ziffer auf 1, wodurch man $F_2 = 1$ addiert hat. Ansonsten endet die Zahl mit 01, was man durch 10 ersetzt, da man auch dadurch $F_3 - F_2 = 1$ addiert. Nun ersetzt man in der Darstellung so oft dies möglich ist die Ziffernfolge 011 durch 100, wobei man wegen $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ am Wert nichts ändert. Dadurch erhält man wieder die eindeutige Form, in der nie zwei Einsen aufeinanderfolgen.

Literatur

Ich habe folgende fachbezogene Literatur beim Erstellen dieser Facharbeit verwendet:

[1] Vorobyov, N. N.: *The Fibonacci Numbers*, D. C. Heath, Boston 1963.

[2] Graham, R. L.; Knuth, Donald E.; Patashnik, Oren: *Concrete mathematics — a foundation for computer science*, Addison-Wesley, 1989, S. 276–287.

[3] Knuth, Donald E.: *The Art of Computer Programming*, Vol. 1, Addison Wesley.

[4] Dickson, L. E.: *History of the theory of Numbers*, Vol. 1, Chelsea, New York 1952.

[5] Basin, S. L.: *The Fibonacci Sequence as it Appears in Nature*, The Fibonacci Quaterly, Vol. 1, No. 1, 1963, S. 53–56.

Dieser Text wurde mit Donald E. Knuth's wunderbarem TEX erstellt,
weshalb ihm diese Arbeit gewidmet sei.

Ich erkläre hiermit, daß ich die Facharbeit ohne fremde Hilfe angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis angeführten Quellen und Hilfsmittel benützt habe.

Uttenreuth, den 31.01.1990

Markus Kuhn